
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ENRICO BOMPIANI

Sulla geometria dell'equazione differenziale

$$y''' = F(x, y, y') + G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 48 (1970), n.1, p. 50–56.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_1_50_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Sulla geometria dell'equazione differenziale* $y''' = F(x, y, y') + G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$. Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

SUMMARY. — A. Terracini has already given properties of the integral curves of the above written equation both on a projective plane or and a surface of a projective space. Additional properties are given here in both cases; in particular a new definition (in the second case) of the principal planes (through a tangent of the surface) introduced by A. Terracini is given.

1. — In alcuni lavori (1) A. Terracini si è occupato delle proprietà geometriche delle curve integrali di un'equazione differenziale del tipo

$$(F) = y''' = F(x, y, y') + G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$$

considerata sia in un piano proiettivo che su una superficie dell'ordinario spazio proiettivo.

Precisamente fissato un elemento differenziale del 1° ordine $\mathring{E}^1$ si tratta di esaminare come varii un E^3 integrale di (F) al variare di un $E^2 \supset \mathring{E}^1$.

Nel piano ai risultati del Terracini aggiungo l'esistenza di una proiettività determinata da (F) fra il fascio di rette per il centro di $\mathring{E}^1$ e le coppie dell'involuzione di $E^2 \supset P^1$ a contatto armonico.

Nello spazio, dopo una digressione sulle forme canoniche di una calotta superficiale del 3° ordine σ_2^3 di cui sia assegnata una tangente non-asintotica (digressione destinata ad abbreviare i calcoli che seguono) trovo l'equazione che fornisce i piani principali secondo la definizione del Terracini; e mi servo di essa per mostrare l'esistenza di una proiettività fra la punteggiata sulla tangente ad $\mathring{E}^1$ e i fasci di rette (principali) passanti per il suo centro e situate nei piani principali: i piani contenenti coppie di rette principali corrispondenti ad uno stesso punto formano fascio con l'asse nel piano tangente.

Trovo poi che i piani principali sono quelli contenenti E^3 integrali piani passanti per $\mathring{E}^1$.

2. — *Curve integrali di (F) nel piano: riferimenti intrinseci.*

Esaminiamo l'equazione (F), o meglio le sue curve integrali nell'intorno dell'elemento $\mathring{E}^1 (x = y = y' = 0)$ di un piano proiettivo in cui x, y siano coordinate proiettive non-omogenee.

(*) Presentata nella seduta del 10 gennaio 1970.

(1) I lavori del Terracini si trovano citati nella mia Nota: *Sulla geometria dell'equazione differenziale* $y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$, « Rend. Acc. Lincei », ser. 8ª, 46, pp. 535-540.

Un $E^3 \supset \mathring{E}^1$ sia rappresentato da

$$(2.1) \quad y = ax^2 + bx^3 + [4] \quad , \quad a = \frac{y''}{2} \quad , \quad b = \frac{y'''}{6} ;$$

le ∞^1 coniche $\supset E^3$ sono date, per $a \neq 0$, da

$$(2.2) \quad y = ax^2 + \frac{b}{a} xy + \gamma y^2$$

con γ arbitrario e perciò formano fascio.

Un punto $P(x_0, 0, z_0)$ (in coordinate omogenee) della retta $y = 0$ di $\mathring{E}^1$ ha per polare la retta p di equazione

$$(2.3) \quad 2a^2x_0x + (bx_0 - az_0)y = 0$$

La proiettività fra la punteggiatura descritta da P e il fascio descritto da p è indicata dal Terracini con ρ : essa è determinata da un E^3 .

Se l' E^3 è integrale della (F), indicati con $\mathring{F}, \mathring{G}, \mathring{H}$ i valori di F, G, H per $\mathring{E}^1$, si ha

$$(2.4) \quad b = \frac{1}{6} \mathring{F} + \frac{1}{3} \mathring{G}a + \frac{2}{3} \mathring{H}a^2.$$

Quindi, fissato un E^2 (cioè a), l' E^3 integrale $\supset E^2$ dà luogo alla proiettività fra la punteggiatura di $P(x_0, 0, z_0)$ e il fascio di rette descritto da p : $ux + vy = 0$ con

$$(2.5) \quad u = 2a^2x_0 \quad , \quad v = \frac{1}{3} \left(\frac{\mathring{F}}{2} + \mathring{G}a + 2\mathring{H}a^2 \right) x_0 - az_0.$$

Ad ogni $E^2 \supset \mathring{E}^1$ corrisponde una proiettività; si ha un fascio di proiettività, al variare di E^2 se e solo se $\mathring{F} = 0$: ciò caratterizza il tipo (G).

Esiste un punto sulla retta di $\mathring{E}^1$ la cui polare è la stessa nelle proiettività determinate da due $\mathring{E}^2$ a contatto armonico (cioè per valori opposti $a, -a$): esso è il punto $(3, 0, \mathring{G})$ cui corrisponde la polare

$$12a^2x + (\mathring{F} + 4\mathring{H}a^2)y = 0$$

dipendente solo da a^2 .

In questa corrispondenza all'elemento E^2 di flesso ($a = 0$) corrisponde, se $\mathring{F} \neq 0$, la $y = 0$ (altrimenti la retta corrispondente è indeterminata); all'elemento singolare ($a = \infty$) corrisponde la retta $3x + \mathring{H}y = 0$ (o in altri termini: questa è l'unica retta del fascio cui non corrisponde un E^2 regolare).

Se si prende il punto $(3, 0, \mathring{G})$ come punto improprio su $y = 0$ (di un nuovo riferimento) e questa retta, pure geometricamente individuata, come $x = 0$ si ha

$$\mathring{G} = 0 \quad , \quad \mathring{H} = 0$$

e in conseguenza per tutti gli E^3 integrali $\supset \mathring{E}^1$ $y''' = \mathring{F}$.

Riassumiamo quanto precede nel teorema:

Le coppie di $E^2 \supset E^1$ fra loro a contatto armonico appartengono ad un'involuzione: questa determina, in relazione ad (F) un punto sulla retta di $\mathring{E}^1$ che

fa corrispondere ad ogni coppia dell'involuzione una retta nel fascio che ha per centro il centro di E^1 : cioè si ha una proiettività fra le coppie di quell'involuzione e le rette del fascio determinata da quel punto (nel piano dato).

3. - Digressione sulle calotte superficiali del 3° ordine.

Prima di passare a considerare l'equazione (F) sopra una superficie facciamo una digressione sulle trasformazioni della rappresentazione di una calotta nel cui centro O ($x = y = z = 0$) e nel cui piano tangente ($z = 0$) sia fissata una tangente (non asintotica) che assumiamo come $y = z = 0$. Assumiamo la tangente coniugata (rispetto alle tangenti asintotiche) come $x = z = 0$. Le equazioni complessive delle tangenti asintotiche sono perciò

$$(3.1) \quad x^2 + \varepsilon y^2 = z = 0$$

con $\varepsilon = \pm 1$ secondo che il punto O è ellittico o iperbolico.

Consideriamo i cambiamenti che non alterano la rappresentazione delle rette indicate nel piano tangente; si può sempre partire dalla σ_2^3 :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} z &= x^2 + \varepsilon y^2 + \varphi_3(x, y) + [4], \\ \varphi_3(x, y) &= a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \end{aligned}$$

e i cambiamenti voluti sono del tipo

$$(3.3) \quad z = \alpha \frac{x' + \beta y'}{1 - P}, \quad y = \alpha \frac{y' + \gamma z'}{1 - P}, \quad z = \alpha^2 \frac{z'}{1 - P}, \quad P = hx' + ky' + jz'.$$

Per l'equazione trasformata

$$\begin{aligned} z' &= x'^2 + \varepsilon y'^2 + \varphi'_3(x', y') + [4], \\ \varphi'_3(x', y') &= a'_{30}x'^3 + 3a'_{21}x'^2y' + 3a'_{12}x'y'^2 + a'_{03}y'^3 \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} a'_{30} &= \alpha a_{30} + (h + 2\beta) & , & & 3a'_{21} &= 3\alpha a_{21} + (k + 2\varepsilon\gamma) \\ 3a'_{12} &= 3\alpha a_{12} + \varepsilon(h + 2\beta) & , & & a'_{03} &= \alpha a_{03} + \varepsilon(k + 2\varepsilon\gamma). \end{aligned}$$

Risulta da queste relazioni che si possono sempre scegliere i parametri da cui dipende il cambiamento di coordinate in modo che siano $a'_{30} = a'_{21} = 0$; e se già si parte da un riferimento per cui $a_{30} = a_{21} = 0$ si avrà pure $a'_{30} = a'_{21} = 0$ per tutti i cambiamenti per i quali

$$h = -2\beta, \quad k = -2\varepsilon\gamma.$$

Per questi cambiamenti risultano

$$a'_{12} = \alpha a_{12}, \quad a'_{03} = \alpha a_{03}.$$

Se non tutt'e due i coefficienti a_{12}, a_{03} sono nulli si può fare uno di essi non nullo $= 1$ e si conserva tale valore per tutti i cambiamenti per cui $\alpha = 1$ (e l'altro coefficiente è un invariante per essi). Se invece i coefficienti sono tutt'e due nulli non rimane alcuna condizione per α e la σ_2^3 è una *calotta quadrica* (cioè appartenente a quadriche).

Sicché le forme canoniche alle quali ci si può sempre riferire sono le seguenti

$$(3.4) \quad \begin{aligned} z &= x^2 + \varepsilon y^2 + 3xy^2 + a_{03}y^3 + [4] & \text{se } a_{12} \neq 0 & \quad (\varepsilon = \pm 1) \\ z &= x^2 + \varepsilon y^2 + 3a_{12}xy^2 + y^3 + [4] & \text{se } a_{03} \neq 0 \\ z &= x^2 + \varepsilon y^2 + [4] & \text{se } a_{12} = a_{03} = 0. \end{aligned}$$

Le prime due rimangono inalterate per cambiamenti del tipo

$$(3.5) \quad x = \frac{x' + \beta z'}{1 + Q}, \quad y = \frac{y' + \gamma z'}{1 + Q}, \quad z = \frac{z'}{1 + Q}, \quad Q = 2(\beta x' + \varepsilon \gamma y' + \delta z')$$

con β, γ, δ arbitrari; e l'ultima per i cambiamenti analoghi

$$(3.6) \quad x = \alpha \frac{x' + \beta z'}{1 + Q}, \quad y = \alpha \frac{y' + \gamma z'}{1 + Q}, \quad z = \frac{\alpha^2 z'}{1 + Q}$$

in cui anche α è arbitrario.

4. - *Pseudo-calotte superficiali.*

Nel seguito ci servirà solo la riduzione di $a_{30} = 0$, cioè di considerare la rappresentazione del tipo

$$(4.7) \quad z = x^2 + \varepsilon y^2 + y\varphi_2(x, y) + [4], \quad \varepsilon = \pm 1$$

con $\varphi_2(x, y)$ forma quadratica in x, y che di fatto non interviene in quanto segue. Notiamo che le ∞^3 calotte che si ottengono al variare di $\varphi_2(x, y)$ formano una *classe d'equivalenza* caratterizzata dal fatto che due qualsiasi superfici contenenti due qualsiasi calotte dell'insieme s'intersecano in curve con punto triplo nel centro O aventi ivi come tangente quella fissata ($y = z = 0$).

Quindi i risultati che si otterranno valgono non solo per *una* calotta, ma per tutte le calotte appartenenti a questo insieme d'equivalenza.

Si può anche osservare (per quanto non interessi per il seguito) che ciascuna delle prime due rappresentazioni (3.4) definisce una classe d'equivalenza (variando arbitrariamente a_{03} e a_{12}): nel primo tipo la relazione d'equivalenza è stabilita dal fatto che (con lo stesso procedimento di prima) la tangente data è tripla nel punto d'intersezione; nel secondo tipo essa è doppia e l'altra tangente è quella coniugata.

Queste varie classi di equivalenza danno esempi di *pseudo-elementi differenziali a due dimensioni* ⁽²⁾ o *pseudo-calotte superficiali*.

(2) Finora avevo considerato pseudo-elementi differenziali curvilinei (ad una dimensione), come classi d'equivalenza di elementi differenziali. Si veda la mia Nota: *Elementi differenziali e trasformazioni birazionali*, Confer. del Semin. Matem. dell'Università di Bari, n. 50, 1960.

5. - Curve integrali di (F) sopra una superficie.

Passiamo ora a considerare la (F) sopra una superficie, anzi sopra una calotta regolare σ_2^3 di equazione (4.7) in uno dei riferimenti che danno luogo a tale rappresentazione: e naturalmente supponiamo la (F) già scritta nelle coordinate x, y (nel piano tangente $z = 0$) determinate dallo stesso riferimento.

Prendiamo come $\mathring{E}^1$ quello definito da $x = y = z = y' = 0$; e consideriamo un $E^2 \supset \mathring{E}^1$ definito da un valore di y'' ; l' $E^3 \supset E^2$ definito da (F) è perciò rappresentato da

$$(5.1) \quad \begin{aligned} y &= \frac{y''}{2} x^2 + \frac{y'''}{3!} x^3 + [4] \\ z &= x^2 + [4] \end{aligned}$$

con

$$(5.2) \quad y''' = \mathring{F} + \mathring{G}y'' + \mathring{H}y''^2$$

ove $\mathring{F}, \mathring{G}, \mathring{H}$ sono i valori di F, G, H per l' $\mathring{E}^1$ fissato.

Si proietti questo E^3 dal punto $(x_0, y_0, z_0 \neq 0)$ sul piano tangente a σ_2^3 in O e siano X, Y e $Z = 0$ le coordinate della proiezione di $(x, y, z) \in E^3$.

Posto $x_0/z_0 = l, y_0/z_0 = m$ si trova

$$X = x - lx^2 + [3] \quad , \quad Y = \left(\frac{y''}{2} - m\right)x^2 + \frac{y'''}{6}x^3 + [4]$$

da cui, eliminando x

$$Y = \left(\frac{y''}{2} - m\right)X^2 + \left\{ly'' - 2lm + \frac{y'''}{6}\right\}X^3 + [4]$$

e perciò

$$Y'' = y'' - 2m \quad , \quad Y''' = y''' + 6ly'' - 12lm.$$

Eliminando fra queste e la (5.2) y'' e y''' si ottiene l'equazione

$$(5.3) \quad Y''' = \mathring{\mathcal{F}} + \mathring{\mathcal{G}}Y'' + \mathring{\mathcal{H}}Y''^2$$

con

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathring{\mathcal{F}} &= \mathring{F} + 2m\mathring{G} + 4m^2\mathring{H} \\ \mathring{\mathcal{G}} &= \mathring{G} + 4\mathring{H}m + 6l \\ \mathring{\mathcal{H}} &= \mathring{H}. \end{aligned}$$

La condizione $\mathring{\mathcal{F}} = 0$ è un'equazione di 2° grado in m e quindi determina due *piani* per la tangente all' $\mathring{E}^1$ fissato tali che le proiezioni delle curve integrali da un loro punto qualsiasi presentano in O i caratteri geometrici delle curve integrali delle equazioni di tipo (G).

Sono questi i due *piani principali* relativi ad $\mathring{E}^1$ introdotti da A. Terracini. Possiamo ora andare oltre.

Si ricordi ⁽³⁾ che (per $\overset{\circ}{z} = 0$) il punto (sulla tangente ad $\overset{\circ}{E}^1$) di coordinate omogenee $(3, 0, \overset{\circ}{g})$ è il punto satellite ⁽⁴⁾ di quello $\overset{\circ}{E}^1$. Per ciascuno dei valori m_1, m_2 di m relativi ai piani principali la seconda delle equazioni (4.4) fa corrispondere ad ogni valore di $\overset{\circ}{g}$ un valore di l : indicheremo i valori così ottenuti con l_1, l_2 . Si ha quindi una proiettività fra la punteggiata che ha per sostegno la tangente ad $\overset{\circ}{E}^1$ e i due fasci di rette (che diremo *principali*) di centro O e situati nei piani principali e perciò una proiettività fra questi fasci.

V'è allora luogo a considerare i piani (che diremo *trasversi*) congiungenti coppie di rette principali corrispondenti in detta proiettività; ciascuno di questi piani dipende da un valore di $\overset{\circ}{g}$.

È facile verificare che il piano corrispondente ad un valore $\overset{\circ}{g}$ (cioè ad un punto della tangente all' $\overset{\circ}{E}^1$ fissato) ha l'equazione

$$6x + 4\overset{\circ}{H}y + (\overset{\circ}{G} - \overset{\circ}{g})z = 0.$$

Si ha quindi un fascio di piani, riferito proiettivamente alla punteggiata sulla tangente fissata, il cui asse è la tangente

$$3x + 2\overset{\circ}{H}y = z = 0$$

che diremo *tangente trasversa* a quella di $\overset{\circ}{E}^1$.

Il birapporto di questa tangente trasversa, di quella data e delle tangenti asintotiche fornisce il significato geometrico di $\overset{\circ}{H}$.

Riassumendo:

Ad ogni punto della tangente dell' $\overset{\circ}{E}^1$ fissato corrisponde in ciascuno dei piani principali una retta per il centro dell' $\overset{\circ}{E}^1$: la corrispondenza fra la punteggiata sulla tangente e ciascuno dei due fasci di rette (che diremo principali) è proiettiva; e quindi è determinata una proiettività fra questi due fasci. I piani congiungenti rette in essa corrispondenti (detti piani trasversi) formano fascio intorno ad una tangente (detta trasversa). Il birapporto di questa con la tangente all' $\overset{\circ}{E}^1$ fissato e con le due tangenti asintotiche dipende dalla sola $\overset{\circ}{H}$.

6. Ulteriore specificazione del riferimento.

In relazione ai piani principali, se nessuno di essi coincide con $z = 0$, cioè se $\overset{\circ}{H} \neq 0$, si può definire in modo intrinseco il piano $y = 0$ prendendo per esso il coniugato armonico del piano tangente $z = 0$ rispetto ai due piani principali. In tal caso $m_1 + m_2 = 0$ e perciò $\overset{\circ}{G} = 0$; e nelle (3.5) è $\gamma = 0$.

In conseguenza per un cambiamento (3.5) è $y/z = y'/z'$ cioè m_1 e $m_2 = -m_1$ sono invarianti e perciò $\overset{\circ}{H}/\overset{\circ}{F}$ è invariante (nel caso particolare di una calotta quadrica può invece farsi, disponendo di α , $\overset{\circ}{H}/\overset{\circ}{F} = 1$).

(3) Si veda la mia Nota citata in (1), n. 2.

(4) *Punto satellite*, secondo A. Terracini, sulla tangente ad E^1 è il punto che ha la stessa polare rispetto alle coniche della rete contenenti gli $\overset{\circ}{E}^3$ integrali $\supset \overset{\circ}{E}^1$.

Con la scelta $\overset{\circ}{G} = 0$ la seconda delle (5.4) dà

$$l_1 = \frac{1}{6} \overset{\circ}{S} - \frac{2}{3} \overset{\circ}{H} m_1, \quad l_2 = \frac{1}{6} \overset{\circ}{S} + \frac{2}{3} \overset{\circ}{H} m_1.$$

Se $\xi = 3/G$ è l'ascissa di un punto della tangente di E^1 , le proiettività fra i punti della tangente e i fasci di rette principali di cui al n. 5 sono determinate da

$$l_1 = \frac{1}{2\xi} - \frac{2}{3} \overset{\circ}{H} m_1, \quad l_2 = \frac{1}{2\xi} + \frac{2}{3} \overset{\circ}{H} m_1$$

e quelle fra cui i due fasci da

$$l_1 + l_2 = \frac{1}{\xi}.$$

7. - *Altra definizione dei piani principali di A. Terracini.*

Cerchiamo se fra gli E^3 integrali della (F) contenenti l' $\overset{\circ}{E}^1$ dato (centro $x = y = z = 0$, tangente $y = z = 0$) ne esistano di piani.

Il piano osculatore all'elemento (5.1), per $y = \frac{y''}{2} z$ contiene l' E^3 se e solo se $y''' = 0$, cioè il piano $y = mz$ contiene un E^3 se e solo se

$$\overset{\circ}{F} + 2 m \overset{\circ}{G} + 4 m^2 \overset{\circ}{H} = 0$$

e questa è esattamente la condizione $\overset{\circ}{F} = 0$ che definisce i *piani principali* di Terracini.

In ciascuno di essi, cioè per ogni radice m_i dell'equazione scritta, l' E^3 piano determina un fascio di coniche

$$y = m_i z, \quad z = x^2 + \tau z^2$$

con τ arbitrario. La polare del punto $(x_0, 0, 0)$ della tangente rispetto ad una di queste coniche è

$$y = m_i z, \quad z = 2 x_0 x.$$

Si ha dunque una nuova proiettività fra i punti della tangente fissata e le rette per il centro in ciascuno dei piani principali. Le due rette corrispondenti ad uno stesso punto stanno nel piano

$$x = \bar{l} z \quad \text{con} \quad \bar{l} = \frac{1}{2 x_0}.$$

Al variare di x_0 questi piani formano fascio intorno alla tangente coniugata ($x = z = 0$) a quella fissata; e sono i piani polari di quei punti rispetto alle ∞^3 quadriche

$$z = x^2 + \varphi_2(y, z)$$

con φ_2 forma quadratica arbitraria.

Le quadriche ora indicate sono quelle contenenti tutti gli E^3 di σ_2^3 aventi la tangente fissata ⁽⁵⁾.

(5) Si veda la mia Nota: *Sugli elementi differenziali di una superficie o ipersuperficie di uno spazio proiettivo*, «Atti Acc. Scienze di Torino», 103, pp. 1011-1023 (1968-69), (v. 2.5, 2.6).