Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marcello Bruni

Potenze esterne di metriche hermitiane in uno spazio vettoriale quaternionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.1, p. 43–49.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_1_43_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Geometria. — *Potenze esterne di metriche hermitiane in uno spazio vettoriale quaternionale* (*). Nota di MARCELLO BRUNI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Let $\mathfrak{V}_n$ be an n-dimensional quaternion vector space and V_{4n} the $4n$-dimensional real vector space, which is the real image of $\mathfrak{V}_n$.

We define hermitian product of simple multivectors in $\wedge^t V_{4n}$ $(2 \leq t \leq 4n)$ as an element of $\mathbf{Q}/\mathbf{Q}'$ ($\mathbf{Q}$ is the group of non-zero quaternions under multiplication) and consequently hermitian measure for simple multivectors. On the ground of these notions a definition of characteristic deviation for V_{4n} subspaces is given and a generalization for multivectors of Cauchy-Schwarz inequality is found.

1. In questa Nota si espongono brevemente i principali risultati che appariranno per esteso in un lavoro di prossima pubblicazione, concernente la nozione di potenza esterna di una metrica hermitiana in uno spazio vettoriale quaternionale ed alcune sue applicazioni.

GENERALITÀ.

2. Sia $\mathfrak{V}_n$ uno spazio vettoriale quaternionale destro. Quando, nel moltiplicare i suoi elementi per gli scalari, ci si limita al campo $\mathbf{R} \subset \mathbf{Q}$ (1), si ottiene un nuovo spazio vettoriale V_{4n} che si dirà *immagine reale* di $\mathfrak{V}_n$.

Sottospazi *caratteristici* V_{4t} di V_{4n} $(t = 1, \cdots, n-1)$ sono le immagini reali di sottospazi $\mathfrak{V}_t$ di $\mathfrak{V}_n$.

Chiameremo pure *quasi-caratteristici* quei sottospazi V_p $(p \geq 2)$ contenuti in uno spazio caratteristico di dimensione inferiore a $4p$ (2).

Indicheremo con lo stesso simbolo, per esempio L, M, un vettore pensato sia in $\mathfrak{V}_n$ che in V_{4n}.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Contratto di Ricerca n. 9 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1969.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1970.

(1) $\mathbf{R}$ è il campo reale, $\mathbf{Q}$ il corpo dei quaternioni sui reali. Per le nozioni generali ved. per esempio [9], [2].

(2) Secondo la terminologia di Severi (per il caso complesso) un tale V_p dovrebbe dirsi « pseudocaratteristico di specie $< p$ ». Un V_p è pseudocaratteristico di specie t quando $4t$ è la dimensione minima di uno spazio caratteristico che lo contiene. Ogni V_p risulta di specie $\leq p$; quindi un V_p si particolarizza in relazione agli spazi caratteristici solo quando la sua specie è $< p$, il che giustifica la nostra denominazione di « quasi-caratteristico ». Per $p > n$ ogni V_p è quasi-caratteristico; un V_1 non è mai quasi-caratteristico.

3. Introduciamo in $\mathcal{V}_n$ una *metrica hermitiana* assegnando un prodotto hermitiano, $(\cdot)$, cioè un'applicazione $\mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n \to \mathbf{Q}$ caratterizzata dalle solite condizioni:

(H 1) $Lq \cdot Mp = \bar{q}\,(L \cdot M)\,p$ (3);

(H 2) $M \cdot L = \overline{L \cdot M}$

(H 3) *distributività*, sia a destra che a sinistra, rispetto alla somma di vettori.

Supporremo la metrica hermitiana:

(H 4) *definita positiva*, ossia $\forall L \neq 0\,,\, L \cdot L > 0$; segue da ciò che la metrica è

(H 5) *non degenere*, ossia se $\forall L\,,\, L \cdot M = 0 \Rightarrow M = 0$.

4. Consideriamo inoltre, accanto alla metrica hermitiana, la metrica *euclidea* indotta dal prodotto scalare $L \times M = \mathrm{Re}\,(L \cdot M)$ (4).

Le due metriche ovviamente coincidono nei sottospazi V_h $(h = 1, \cdots, n)$ *a prodotto hermitiano reale*; in particolare per ogni vettore L la misura hermitiana definita dalla

$$\mathrm{mis}_H\, L = \sqrt{L \cdot L} \tag{4.1}$$

coincide con la misura euclidea.

5. Consideriamo lo spazio vettoriale $\wedge^t V_{4n}$ potenza esterna t–ma di V_{4n}. È noto che la metrica euclidea data in V_{4n} dal prodotto scalare $(\times)$ induce in $\wedge^t V_{4n}$ una metrica euclidea che si dice potenza esterna t–ma della metrica euclidea di V_{4n}. Tale nuova metrica si esprime con il prodotto scalare $\overset{t}{\times}$ definito ponendo, per ogni coppia di t–vettori semplici $\mathcal{L} = L_1 \wedge \cdots \wedge L_t$, $\mathcal{M} = M_1 \wedge \cdots \wedge M_t$

$$(L_1 \wedge \cdots \wedge L_t) \overset{t}{\times} (M_1 \wedge \cdots \wedge M_t) = \det\,(L_r \times M_s) \tag{5.1}$$

ed estendendo poi per linearità il prodotto $\times$ ai t–vettori non semplici.

PRODOTTO HERMITIANO DI MULTIVETTORI.

6. Ci proponiamo ora di definire *potenze esterne* di una *metrica hermitiana* di V_{4n}.

Seguendo fin dove è possibile l'analogia con il caso della metrica euclidea, consideriamo questa volta la matrice $(L_r \cdot M_s)$. Poiché essa è ad elementi quaternionali il suo determinante si può valutare facendo uso

(3) $p\,,q$ sono quaternioni, la barra indica il coniugio, e $|p| = \sqrt{p\bar{p}}$ è il modulo di p.

(4) Re (q) è la parte reale del quaternione q.

della teoria dei determinanti su un corpo non commutativo sviluppata da J. Dieudonné [4] (5).

Il determinante di Dieudonné è, nel nostro caso, non un quaternione, ma un elemento del quoziente $\mathbf{Q}/\mathbf{Q}'$ (6), elemento che risulta costituito dalla totalità dei quaternioni che hanno uno stesso modulo.

Ciò posto, assumiamo la seguente definizione:

(6.1) *prodotto hermitiano*, $(\overset{t}{\cdot})$, *dei multivettori semplici* $L_1 \wedge \cdots \wedge L_t$, $M_1 \wedge \cdots \wedge M_t$ *è l'elemento di* $\mathbf{Q}/\mathbf{Q}'$ dato dalla:

$$(6.2) \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_t) \overset{t}{\cdot} (M_1 \wedge \cdots \wedge M_t) = \det_D (L_r \cdot M_s).$$

ove si è indicato con $\det_D$ il determinante di Dieudonné.

7. Il prodotto hermitiano di multivettori semplici ora definito

(7.1) *non dipende dai rappresentanti* dei multivettori.

Inoltre esso soddisfa a relazioni analoghe alle (H 1), (H 2) del n. 2. Valgono anzi relazioni più particolareggiate, che si esprimono con uguaglianze tra matrici, come è indicato dal seguente:

TEOREMA 1. – *Dati i multivettori semplici* $\mathfrak{L} = L_1 \wedge \cdots \wedge L_t$, $\mathfrak{M} = M_1 \wedge \cdots \wedge M_t$ *e due matrici quadrate* P, Q, *di ordine t ad elementi in* $\mathbf{Q}$, *posto*

$$(7.2) \qquad (L'_1 \cdots L'_t) = (L_1 \cdots L_t)\, P \quad , \quad (M'_1 \cdots M'_t) = (M_1 \cdots M_t)\, Q$$

risulta:

(H 1) $(L'_{r'} \cdot M'_{s'}) = \bar{P}^* (L_r \cdot M_s)\, Q$

(H 2) $(M_s \cdot L_r) = \overline{(L_r \cdot M_s)}^*$ (7).

Osservazioni.

1. – Si badi bene che i multivettori semplici considerati dovranno sempre pensarsi nello spazio vettoriale potenza esterna t–ma dello spazio vettoriale *sul campo reale* V_{4n}, sebbene i singoli vettori che determinano un multivettore vengano da noi considerati, come si è detto, indifferentemente in V_{4n} o in $\mathfrak{V}_n$.

2. – Contrariamente a quanto accade per il prodotto scalare (n. 5) non sembra ovvia l'estensione del prodotto hermitiano $\overset{t}{\cdot}$ a multivettori non semplici di $\wedge^t V_{4n}$.

(5) Recentemente D. Lenzi [5] ha sviluppato un'altra teoria dei determinanti su un corpo non commutativo, ma essa non darebbe luogo a definizioni simmetriche rispetto ai singoli vettori che determinano i t–vettori $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$.

(6) $\mathbf{Q}'$ è il derivato (gruppo dei commutatori) del gruppo moltiplicativo di $\mathbf{Q} - \{0\}$.

(7) Con A^* ed $\bar{A}$ si sono indicate rispettivamente le matrici trasposta e coniugata di A; i prodotti di matrici si intendono eseguiti al solito righe per colonne.

MISURA HERMITIANA DEI MULTIVETTORI.

8. In analogia alla (4.1) definiamo ora *misura hermitiana* di un multivettore semplice $\mathfrak{L}$ di $\wedge^t V_{4n}$ il numero reale positivo o nullo

$$\operatorname{mis}_H \mathfrak{L} = \sqrt{|\mathfrak{L} \overset{t}{\cdot} \mathfrak{L}|}\,. \tag{8.1}$$

La misura hermitiana è definita senza ambiguità, come si riconosce in base alla (7.1) e al fatto che gli infiniti quaternioni della classe che esprime il prodotto hermitiano $\mathfrak{L} \overset{t}{\cdot} \mathfrak{L}$ hanno il medesimo modulo.

Vale inoltre il:

TEOREMA 2. – *La misura hermitiana del multivettore semplice* $\mathfrak{L}$ *è*:

a) *minore o uguale alla misura euclidea di* $\mathfrak{L}$ (8) *ed anzi è uguale se e solo se* $\mathfrak{L}$ *è a prodotto hermitiano reale* (9);

b) *nulla se e solo se* $\mathfrak{L}$ *è prodotto esterno di* t *vettori dipendenti su* **Q** *e dunque appartenenti ad un sottospazio quasi–caratteristico* (n. 2).

9. Il prodotto hermitiano e la misura hermitiana dei multivettori semplici godono delle seguenti proprietà:

(9.1) *Il prodotto hermitiano non cambia se ad uno dei due multivettori si sostituisce la sua proiezione ortogonale su uno spazio caratteristico contenente l'altro* (10).

(9.2) *Se il multivettore* $\mathfrak{L}$ *si proietta ortogonalmente su uno spazio caratteristico, detta* $\mathfrak{L}'$ *la sua proiezione si ha* $\operatorname{mis}_H \mathfrak{L}' \leq \operatorname{mis}_H \mathfrak{L}$ *e l'uguaglianza vale nel solo caso in cui lo spazio caratteristico contenga* $\mathfrak{L}$.

ALCUNE APPLICAZIONI.

10. In [2], [3], basando sulla disuguaglianza tra misure hermitiana ed euclidea di un bivettore semplice, e richiamandomi ad idee di G. B. Rizza [10] e di E. Martinelli [6] per il caso complesso, ho introdotto la nozione di *deviazione caratteristica assoluta* di un sottospazio V_2 di V_{4n}.

(8) Valutata, naturalmente, nella metrica $\overset{t}{\times}$.

(9) Ossia, se $\mathfrak{L}$ è prodotto esterno di t vettori che individuano un V_t a prodotto hermitiano reale.

(10) Più esplicitamente: siano $\mathfrak{L} = L_1 \wedge \cdots \wedge L_t$, $\mathfrak{M} = M_1 \wedge \cdots \wedge M_t$ ed $L_1', \cdots, L_t'$ i vettori proiezioni ortogonali (rispetto a $\cdot$ o a $\times$ è in questo caso lo stesso) di $L_1, \cdots, L_t$ su uno spazio caratteristico contenente $M_1, \cdots, M_t$; posto $\mathfrak{L}' = L_1' \wedge \cdots \wedge L_t'$ risulta $\mathfrak{L}' \overset{t}{\cdot} \mathfrak{M} = \mathfrak{L} \overset{t}{\cdot} \mathfrak{M}$. In modo ovviamente analogo si intendano alcuni degli enunciati successivi.

La disuguaglianza *a*) del Teorema 2 suggerisce ora di introdurre una nozione analoga per ogni $V_t \subset V_{4n}$. Si tratta anche qui di un angolo δ_{V_t} compreso tra zero e $\pi/2$ che è tanto minore quanto più il V_t è « prossimo » ad essere quasi-caratteristico. L'aggettivo « assoluta » ricorda che lo spazio V_t è considerato sprovvisto di orientazione.

Precisamente, assegnato V_t, consideriamo il prodotto esterno $\mathfrak{L}$ di t vettori di V_t indipendenti su $\mathbf{R}$. Definiamo la *deviazione caratteristica assoluta* δ_{V_t} di V_t mediante la:

$$\text{(10.1)} \qquad \operatorname{sen} \delta_{V_t} = \frac{\operatorname{mis}_H \mathfrak{L}}{\operatorname{mis}_E \mathfrak{L}}\,; \qquad 0 \leq \delta_{V_t} \leq \pi/2 \text{ (11)}.$$

Ebbene sussiste il

TEOREMA 3. – *La deviazione caratteristica assoluta δ_{V_t} dello spazio $V_t \subset V_{4n}$ è:*

a) *nulla se e solo se V_t è quasi-caratteristico;*

b) *uguale a $\pi/2$ se e solo se V_t è a prodotto hermitiano reale.*

11. È noto che per due vettori L, M di V_{4n} vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (12):

$$\text{(11.1)} \qquad | L \cdot M | \leq \operatorname{mis} L \operatorname{mis} M$$

che si riduce ad un'uguaglianza se e solo se i V_4 caratteristici individuati da L, M coincidono, oppure se $L = 0$ o $M = 0$.

Sulla base delle nozioni introdotte questo risultato si estende nel seguente:

TEOREMA 4. – *Dati due multivettori semplici $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ di $\wedge^t V_{4n}$ vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:*

$$\text{(11.2)} \qquad | \mathfrak{L} \overset{t}{\cdot} \mathfrak{M} | \leq \operatorname{mis}_H \mathfrak{L} \operatorname{mis}_H \mathfrak{M}.$$

Essa si riduce ad un'uguaglianza se e soltanto se gli spazi caratteristici di dimensione minima contenenti rispettivamente $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ coincidono, oppure se almeno uno dei due multivettori appartiene ad uno spazio quasi-caratteristico.

L'ultimo caso è caratterizzato dall'annullarsi dei due membri di (11.2) (e appare analogo al caso $L = 0$ o $M = 0$ per la 11.1).

12. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per due vettori di V_{4n} permette di introdurre [3] l'*angolo hermitiano* di sottospazi V_1 di V_{4n}; analogamente la (11.2) suggerisce di considerare l'angolo hermitiano di due spazi V_t, V'_t.

A tale scopo scegliamo tanto in V_t quanto in V'_t t vettori indipendenti (su $\mathbf{R}$), siano $L_1, \cdots, L_t$ ed $L'_1, \cdots, L'_t$; consideriamo quindi i prodotti esterni $\mathfrak{L} = L_1 \wedge \cdots \wedge L_t$, $\mathfrak{L}' = L'_1 \wedge \cdots \wedge L'_t$.

(11) Con $\operatorname{mis}_E \mathfrak{L}$ indichiamo la misura euclidea di $\mathfrak{L}$ valutata nella metrica $\overset{t}{\times}$; la (10.1) è legittima perché il rapporto a secondo membro non dipende da $\mathfrak{L}$ ma solo da V_t.

(12) Ved. [8] pag. 175 [3].

Definiamo *angolo hermitiano* di V_t, V'_t l'angolo $\theta_H(V_t, V'_t)$ espresso dalla:

$$\cos\theta_H(V_t, V'_t) = \frac{|\mathfrak{L} \overset{t}{\cdot} \mathfrak{L}'|}{\text{mis}_H \mathfrak{L}\, \text{mis}_H \mathfrak{L}'} ; \qquad 0 \leq \theta_H \leq \pi/2 . \tag{12.1}$$

L'angolo θ_H introdotto è:

a) *indipendente dalla scelta dei multivettori* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ *considerati in* V_t, V'_t;

b) *nullo se e solo se gli spazi caratteristici minimi contenenti* V_t, V'_t *coincidono*;

c) *uguale a* $\pi/2$ *se e solo se è quasi–caratteristico lo spazio proiezione ortogonale di uno dei due spazi* V_t, V'_t *sullo spazio caratteristico minimo contenente l'altro.*

13. In V_{4n} hanno interesse le applicazioni semilineari $\mathfrak{I}_q : L \rightarrow Lq$ ove L è un vettore e q un quaternione di norma unitaria [7]. Ogni $\mathfrak{I}_q$ è al tempo stesso una particolare rotazione euclidea di V_{4n} [3].

Consideriamo ora l'applicazione $\wedge^t \mathfrak{I}_q$ indotta da $\mathfrak{I}_q$ in $\wedge^t V_{4n}$. Essa trasforma multivettori semplici in multivettori semplici e vale il seguente:

TEOREMA 5. – *L'applicazione* $\wedge^t \mathfrak{I}_q$ *soddisfa alle proprietà*:

a) *la deviazione caratteristica assoluta di ogni sottospazio di* V_{4n} *e l'angolo hermitiano di ogni coppia di sottospazi di uguale dimensione restano invariati per* $\wedge^t \mathfrak{I}_q$;

b) *se* V *è un sottospazio di* V_{4n} *e* $V_{(q)} = \wedge^t \mathfrak{I}_q V$, *per l'angolo hermitiano* θ_H *risulta*: $\theta_H(V, V_{(q)}) = 0$;

c) *se* V *è in particolare a prodotto hermitiano reale*, *l'angolo euclideo* $\theta_E(V, V_{(q)})$ *dipende solo da* q *e dalla dimensione* t (*su* **R**) *di* V *e precisamente risulta*:

$$\cos\theta_E(V, V_{(q)}) = [\text{Re}(q)]^t. \tag{13.1}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. 9, Hermann, Paris 1959.

[2] M. BRUNI, *Relazioni tra metrica euclidea ed hermitiana in uno spazio vettoriale quaternionale*, « Rend. Lincei », *38* (1965).

[3] M. BRUNI, *Misure angolari in uno spazio vettoriale quaternionale*, « Rend. di Mat. e Appl. », *25* (1966).

[4] J. DIEUDONNÉ, *Les déterminants sur un corps non commutatif*, « Bull. Soc. Math. de France », *68* (1943).

[5] D. LENZI, *Matrici, determinanti e sistemi di equazioni lineari su di un corpo qualsiasi*, « Rend. di Mat. », *2* (1969).

[6] E. MARTINELLI, *Generalizzazione dei teoremi di minimo volume di Wirtinger a tutte le varietà kähleriane o quasi–kähleriane*, « Ann. di Mat. pura e Appl. », *50* (1960).

[7] E. MARTINELLI, *Metriche hermitiane sulle varietà a struttura quasi quaternionale generalizzata*, « Rend. Lincei », sez. 8ª, *39* (1965).

[8] E. MARTINELLI, *Lezioni di geometria superiore*, Ist. Mat. « G. Castelnuovo », Roma 1965.

[9] E. MARTINELLI, *Metrica hermitiana e metriche euclidea e simplettica associate*, « Rend. Mat. e Appl. », *2* (1969).

[10] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, « Rend. Lincei », *24* (1958).

[11] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica e proprietà locali delle 2q-faccette di una* V_{2n} *a struttura complessa*, « Rend. Acc. Naz. XL », *10* (1959).

[12] B. SEGRE, *Proprietà algebrico-geometriche di forme bilineari ed estensioni della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*, « Periodico di Mat. », ser. 4ª, *46* (1968).

[13] F. SEVERI, *La geometria delle funzioni analitiche di più variabili ed i teoremi di esistenza e di unicità ad esse relativi*, « Ann. di Mat. pura e appl. », *16* (1937).