Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sorin Gogonea

Sur un problème mixte à singularités données pour le plan muni des coupures rectilignes alignées

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.1, p. 33–38.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_1_33_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Analisi matematica. — *Sur un problème mixte à singularités données pour le plan muni des coupures rectilignes alignées.* Nota di SORIN GOGONEA, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Sia $\mathfrak{D}$ il piano $z = x + iy$ tagliato lungo segmenti L_j $(j = 1, 2, \cdots, p)$ e T_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$ senza punti comuni. Si determina una funzione $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ analitica in $\mathfrak{D}$ supponendo che $F(z)$ abbia delle singolarità isolate e conoscendo i valori di U sugli orli superiori degli L_j e sugli orli inferiori dei T_k, anche i valori di V sugli orli inferiori degli L_j e sugli orli superiori dei T_k.

1. Soient dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$ les segments disjoints $L_j : \overline{A_j B_j}$ $(j = 1, 2, \cdots, p)$ et $T_k : \overline{C_k D_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, q)$ situés sur l'axe Ox, leurs extremités ayant respectivement les abscisses a_j, b_j, c_k, d_k, tel que $a_1 < b_1 < a_2 <, \cdots, < a_p < b_p$ et $c_1 < d_1 < c_2 <, \cdots, < c_q < d_q$. Désignons par E_A, E_B, E_C et E_D respectivement l'ensemble des points A_j, B_j, C_k et D_k et posons $E = E_A + E_B$, $E' = E_C + E_D$, $\mathcal{E} = E + E'$. Les abscisses des points de E considérées dans un ordre arbitraire seront notées par e_m $(m = 1, 2, \cdots, 2p)$ et celles de E' par e_n $(n = 1, 2, \cdots, 2q)$. Soit ensuite $\mathfrak{D}$ le domaine dont la frontière est la réunion des coupures pratiquées sur L_j et T_k. Les côtés supérieures des coupures (vers $y > 0$) et ceux inférieures seront notés respectivement par L_j^+, T_k^+ et L_j^-, T_k^- et posons $L^+ = \bigcup_{j=1}^{p} L_j^+$, $L^- = \bigcup_{j=1}^{p} L_j^-$, $T^+ = \bigcup_{k=1}^{q} T_k^+$, $T^- = \bigcup_{k=1}^{q} T_k^-$, $\mathfrak{L} = L^+ + L^-$ et $\mathcal{T} = T^+ + T^-$.

Le problème qui constitue l'objet de cette Note est le suivant: $F_0(z)$ étant une fonction uniforme définie dans tout le plan, à l'exception de l'ensemble S de ses singularités isolées qui se trouvent en $\mathfrak{D}$ à une distance finie, déterminer une fonction $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ dans $\mathfrak{D}$ telle que

a) La différence

$$\mathcal{F}(z) = F(z) - F_0(z) \tag{1}$$

est holomorphe en chaque point de $\mathfrak{D}$, y inclus le point à l'infini.

b) $F(z)$ est continûment prolongéable sur $\mathfrak{L} + \mathcal{T} - \mathcal{E}$, et au voisinage des points de $\mathcal{E}$ on a

$$|F(z)| < \frac{C^{te}}{|z - \tilde{e}_s|^{\alpha}}, \qquad \alpha \in (0, 1), \tag{2}$$

où $\tilde{e}_s$ $[s = 1, 2, \cdots, 2(p + q)]$ sont les abscisses des points de $\mathcal{E}$ numérotées dans un ordre arbitraire.

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1970.

c) Les valeurs limites de U et V doivent remplir les conditions

$$U^+(x\,,0)=f^+(x)\,,\quad x\in L^+\quad;\quad V^-(x\,,0)=g^-(x)\,,\quad x\in L^-, \tag{3}$$

$$V^+(x\,,0)=g^+(x)\,,\quad x\in T^+\quad;\quad U^-(x\,,0)=f^-(x)\,,\quad x\in T^-, \tag{4}$$

où $f^+(x)$ et $g^-(x)$, respectivement $f^-(x)$ et $g^+(x)$, sont des fonctions höldériennes données sur les segments L_j, respectivement sur les segments T_k.

Dans le cas où $F_0(z)=0$ et en absence des coupures $\mathcal{C}$, le problème a été résolu par D. I. Sherman [1], par un procédé qui utilise les équations intégrales singulières. N. I. Mouskhélichvili a remarqué, sans donner des détails [2], que le problème de [1] peut être résolu plus simplement en le réduisant à deux problèmes de Riemann pour les contours ouverts. En reprenant cette idée et en utilisant les résultats que nous avons obtenu dans le problème de Riemann à singularités données [3], nous allons résoudre le problème sous la forme plus générale énoncée ci–dessus. En évitant de réduire le problème à un problème sans singularités, la méthode que sera développée permet de séparer la solution en deux parties bien distinctes, l'une qui contient toutes les singularités et l'autre qui s'exprime seulement par l'intermédiaire de $f^{\pm}(x)$ et $g^{\pm}(x)$. Sous cette forme la solution est très commode dans les applications où l'on rencontre des problèmes homogènes.

2. Représentons $F(z)$ sous la forme

$$F(z)=\Phi(z)+\Omega(z)\,, \tag{5}$$

où

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}[F(z)+i\overline{F(\bar z)}]\quad;\quad\Omega(z)=\frac{1}{2}[F(z)-i\overline{F(\bar z)}]. \tag{6}$$

Alors si nous posons

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2}[F_0(z)+i\overline{F_0(\bar z)}]\quad;\quad\Omega_0(z)=\frac{1}{2}[F_0(z)-i\overline{F_0(\bar z)}], \tag{7}$$

il est évident que les différences $\Phi(z)-\Phi_0(z)$ et $\Omega(z)-\Omega_0(z)$ sont holomorphes et que l'on a

$$\overline{\Phi_0(\bar z)}=-i\Phi_0(z)\quad;\quad\overline{\Omega_0(\bar z)}=i\Omega_0(z)\,. \tag{8}$$

Donc $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ possèdent des singularités isolées dans les points de $S\cup S^*$ ou S^* est l'ensemble des points symétriques à S par rapport à l'axe Ox, leurs parties principales étant respectivement $\Phi_0(z)$ et $\Omega_0(z)$.

Alors si l'on fait z tendre vers un point de la frontière il résulte

$$\Phi^+(x)=G(x)\,\Phi^-(x)+G_1(x)\,, \tag{9}$$

$$\Omega^+(x)=G^*(x)\,\Omega^-(x)+G_1^*(x)\,, \tag{10}$$

où

$$(11)\quad G(x)=\begin{cases} i\ , & x\in\bigcup_{j=1}^{p} L_j \\ -i\ , & x\in\bigcup_{k=1}^{q} T_k \end{cases}\quad ;\quad G_1(x)=\begin{cases} f^+(x)+g^-(x)\ , & x\in\bigcup_{j=1}^{p} L_j \\ i[g^+(x)+f^-(x)]\ , & x\in\bigcup_{k=1}^{q} T_k\ , \end{cases}$$

$$(12)\quad G^*(x)=\begin{cases} -i\ , & x\in\bigcup_{j=1}^{p} L_j \\ i\ , & x\in\bigcup_{k=1}^{q} T_k \end{cases}\quad ;\quad G_1^*(x)=\begin{cases} f^+(x)-g^-(x)\ , & x\in\bigcup_{j=1}^{p} L_j \\ i[g^+(x)-f^-(x)]\ , & x\in\bigcup_{k=1}^{q} T_k\ , \end{cases}$$

en désignant par $\Phi^+(x)$ et $\Omega^+(x)$, respectivement $\Phi^-(x)$ et $\Omega^-(x)$, les valeurs limites de $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ sur $L^+ + T^+$, respectivement sur $L^- + T^-$.

On aboutit de la sorte à deux problèmes de Riemann à singularités données pour les contours ouverts L_j et T_k [3], $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ devant satisfaire en plus les conditions qui résultent de (1), (6) et (7)

$$(13)\qquad \overline{\Phi(\bar z)} = -i\Phi(z)\quad ;\quad \overline{\Omega(\bar z)} = i\Omega(z)\,.$$

3. Considérons au début le problème pour $\Phi(z)$. Soit $X(z)$ la solution canonique du problème homogène sans singularités de classe $h(\tilde e_1, \tilde e_2, \cdots, \tilde e_r)$ et ayant l'indice $\varkappa$ [2]. $X(z)$ est donc une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, sauf peut-être pour $z=\infty$, où elle est d'ordre minime, satisfaisant à la condition aux limites $X^+(x) = G(x)\,X^-(x)$ et qui est bornée au voisinage des points $\tilde e_l \in \mathcal{E}$ $[l = 1, 2, \cdots, r \le 2(p+q)]$ donnés à l'avance. Soit ensuite $M(z)$ la somme des parties principales de la fonction $\Phi_0(z)/X(z)$ relatif à toutes les singularités et posons

$$(14)\qquad \frac{\Phi_0(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\,X(z)}\,[F_0(z) + i\,\overline{F_0(\bar z)}] = M(z) + H(z)\,,$$

$H(z)$ étant donc holomorphe. Alors la formule (10) de [3] nous donne

$$(15)\qquad \Phi(z) = X(z)\,[M(z) + P_\varkappa(z)] +$$
$$+\frac{X(z)}{2\pi i}\left[\int_{L^+}\frac{f^+(x)+g^-(x)}{X^+(x)}\,\frac{dx}{x-z} + i\int_{T^+}\frac{g^+(x)+f^-(x)}{X^+(x)}\,\frac{dx}{x-z}\right],$$

où $P_\varkappa(z)$ est un polynôme arbitraire de degré $\varkappa$ si $\varkappa \ge 0$ et égal à zero si $\varkappa < 0$, le sens d'intégration sur chaque L_j^+ ou T_k^+ étant respectivement celui de A_j à B_j ou de C_k à D_k. Si $\varkappa \ge 0$, $\Phi(z)$ satisfait toutes les conditions sauf (13). Mais si $\varkappa < 0$, $\Phi(z)$ possède un pôle suplémentaire à l'infini. Pour qu'il disparaisse il faut et il suffit que [3],

$$(16)\qquad \omega_s - \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{L^+}\frac{f^+(x)+g^-(x)}{X^+(x)}\,x^{s-1}\,dx + i\int_{T^+}\frac{g^+(x)+f^-(x)}{X^+(x)}\,x^{s-1}\,dx\right] = 0$$
$$s = 1, 2, \cdots, -\varkappa - 1\,,$$

où les ω_s résultent du developpement au voisinage du point à l'infini

$$M(z) - \frac{\Phi_0(x)}{X(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j z^{-j}. \tag{17}$$

L'accomplissement de ces conditions assure en même temps l'unicité de la solution.

En utilisant les formules connues [2], il est facile de calculer $X(z)$. Soit que l'ensemble $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_r)$ est formé des abscisses des points $A_{m_j} \in E_A$ $(j = 1, 2, \cdots, \mu)$, $B_{m'_j} \in E_B$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$, $C_{n_j} \in E_C$ $(j = 1, 2, \cdots, \rho)$ et $D_{n'_j} \in E_D$ $(j = 1, 2, \cdots, \delta)$, $\mu + \nu + \rho + \delta = r$. Alors on obtient que

$$X(z) = \prod_{j=1}^{\mu} (z - a_{m_j})^{3/4} \prod_{j=\mu+1}^{p} (z - a_{m_j})^{-1/4} \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_{m'_j})^{1/4} \prod_{j=\nu+1}^{p} (z - b_{m'_j})^{-3/4} \times \tag{18}$$
$$\times \prod_{j=1}^{\varrho} (z - c_{n_j})^{1/4} \prod_{j=\varrho+1}^{q} (z - c_{n_j})^{-3/4} \prod_{j=1}^{\delta} (z - d_{n'_j})^{3/4} \prod_{j=\delta+1}^{q} (z - d_{n'_j})^{-1/4},$$

en choisissant pour cette fonction la détermination qu'elle est réelle et positive pour z réel et plus grand que $\max\{\tilde{e}_s\}$, $s = 1, 2, \cdots, 2(p+q)$, et que doit être suivie par continuité. On a donc au voisinage de $z = \infty$

$$X(z) = z^{r-(p+q)} \left[1 + o\left(\frac{1}{z}\right)\right], \tag{19}$$

ce qui fait voir que $\varkappa = p + q - r$. On a évidemment $\overline{X(\bar{z})} = X(z)$ et, compte tenu de la relation $\overline{M(\bar{z})} = -iM(z)$ qu'on peut déduire de (8) et (14), il est facile de voir que $\overline{\Phi(\bar{z})} = -i\Phi(z)$ si et seulement si $P_\varkappa(z) = \sum_{j=0}^{\varkappa} (\alpha_j + i\alpha_j) z^j$, où les α_j sont réels.

4. La fonction $\Omega(z)$ peut être déterminée d'une manière analogue. Si les points $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_r$ sont les mêmes comme dans le cas précédent, alors la solution canonique $Y(z)$ du problème homogène (10) sans singularités de classe $h(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_r)$ et ayant l'indice $\varkappa^*$ résulte sous la forme

$$Y(z) = \prod_{j=1}^{\mu} (z - a_{m_j})^{1/4} \prod_{j=\mu+1}^{p} (z - a_{m_j})^{-3/4} \prod_{j=1}^{\nu} (z - b_{m'_j})^{3/4} \prod_{j=\nu+1}^{p} (z - b_{m'_j})^{-1/4} \times \tag{20}$$
$$\times \prod_{j=1}^{\varrho} (z - c_{n_j})^{3/4} \prod_{j=\varrho+1}^{q} (z - c_{n_j})^{-1/4} \prod_{j=1}^{\delta} (z - d_{n'_j})^{1/4} \prod_{j=\delta+1}^{q} (z - d_{n'_j})^{-3/4},$$

en choisissant la même détermination comme pour $X(z)$. Il s'ensuit que $\overline{Y(\bar{z})} = Y(z)$ et qu'au voisinage de $z = \infty$ on a

$$Y(z) = z^{r-(p+q)} \left[1 + o\left(\frac{1}{z}\right)\right], \tag{21}$$

ce qu'implique $\varkappa^* = p + q - r = \varkappa$.

Soit que $N(z)$ représente la somme des parties principales de la fonction $\Omega_0(z)/Y(z)$ relatif à toutes les singularités et posons

$$\frac{\Omega_0(z)}{Y(z)} = \frac{1}{2Y(z)}\left[F_0(z) - i\overline{F_0(\bar z)}\right] = N(z) + J(z), \tag{22}$$

$J(z)$ étant donc holomorphe. Alors analogue à (15) on obtient

$$\Omega(z) = Y(z)\left[N(z) + Q_\varkappa(z)\right] + \tag{23}$$

$$+ \frac{Y(z)}{2\pi i}\left[\int_{L^+} \frac{f^+(x) - g^-(x)}{Y^+(x)} \frac{dx}{x-z} + i\int_{T^+} \frac{g^+(x) - f^-(x)}{Y^+(x)} \frac{dx}{x-z}\right],$$

où le polynôme $Q_\varkappa(z)$ est nul pour $\varkappa < 0$. Les conditions de compatibilité pour le cas $\varkappa < 0$, analogues à (16) et qui assurent l'unicité de la solution sont

$$\gamma_s - \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{L^+} \frac{f^+(x) - g^-(x)}{Y^+(x)} x^{s-1} dx + i\int_{T^+} \frac{g^+(x) - f^-(x)}{Y^+(x)} x^{s-1} dx\right] = 0, \tag{24}$$

$$s = 1, 2, \cdots, -\varkappa - 1,$$

où les γ_s résultent du developpement au vosinage de $z = \infty$

$$N(z) - \frac{\Omega_0(z)}{Y(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j z^{-j}. \tag{25}$$

Ensuite de (8) et (22) on déduit $\overline{N(\bar z)} = i N(z)$. Alors en utilisant (23) et les propriétés de $Y(z)$ on peut voir sans difficulté que $\overline{\Omega(\bar z)} = i\,\Omega(z)$ si et seulement si $Q_\varkappa(z) = \sum_{j=0}^{\varkappa} (\beta_j - i\beta_j) z^j$ où les β_j sont réels.

5. Une fois $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ obtenues, $F(z)$ résulte de (5) sous la forme

$$F(z) = X(z)\left[M(z) + \sum_{j=0}^{p+q-r} (\alpha_j + i\alpha_j) z^j\right] + Y(z)\left[N(z) + \sum_{j=0}^{p+q-r} (\beta_j - i\beta_j) z^j\right] + \tag{26}$$

$$+ \frac{X(z)}{2\pi i}\left[\int_{L^+} \frac{f^+(x) + g^-(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{x-z} + i\int_{T^+} \frac{g^+(x) + f^-(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{x-z}\right] +$$

$$+ \frac{Y(z)}{2\pi i}\left[\int_{L^+} \frac{f^+(x) - g^-(x)}{Y^+(x)} \frac{dx}{x-z} + i\int_{T^+} \frac{g^+(x) - f^-(x)}{Y^+(x)} \frac{dx}{x-z}\right],$$

où les constantes réelles α_j et β_j sont nulles si $p + q - r < 0$. Il est claire qu'à la suite des raisonnements faits cette fonction satisfait les conditions (3) et (4), ce qu'on peut d'ailleurs aisément vérifier. Compte tenu des propriétés de $X(z)$ et $Y(z)$ il résulte que $F(z)$ est effectivement bornée au voisinage des points $\tilde e_1, \tilde e_2, \cdots, \tilde e_r$ et satisfait la condition (2) au voisinage de toutes les autres extremités. Prouvons qu'elle vérifie également la condition *a*). Puisque $F_0(z) = \Phi_0(z) + \Omega_0(z)$ de (14), (22) et (26) on obtient

$$
\begin{aligned}
(27) \qquad \mathcal{F}(z) = X(z) \Bigg\{ & -H(z) + \sum_{j=0}^{p+q-r} (\alpha_j + i\,\alpha_j)\, z^j + \\
& + \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{L^+} \frac{f^+(x) + g^-(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{x-z} + i \int_{T^+} \frac{g^+(x) + f^-(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{x-z}\right]\Bigg\} + \\
+ Y(z) \Bigg\{ & -J(z) + \sum_{j=0}^{p+q-r} (\beta_j - i\,\beta_j)\, z^j + \\
& + \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{L^+} \frac{f^+(x) - g^-(x)}{Y^+(x)} \frac{dx}{x-z} + i \int_{T^+} \frac{g^+(x) - f^-(x)}{Y^+(x)} \frac{dx}{x-z}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Supposons $p + q - r \geq 0$. Compte tenu de (19) et (21) il résulte que $\mathcal{F}(z)$ est holomorphe et donc $F(z)$ a seulement les singularités désirées. Si $p + q - r < 0$, $\mathcal{F}(z)$ possède en apparence un pôle d'ordre $r - (p + q)$ à l'infini introduit par $X(z)$ et $Y(z)$. Mais cette singularité suplémentaire disparait graçe aux conditions (16) et (24), où $\varkappa = p + q - r$, qui sont remplies par hypothèse et qui assurent en même temps l'unicité de la solution.

Remarquons en terminant que si dans les expressions de $X(z)$ et $Y(z)$ on écarte les produits où figurent les point c_k et d_k, on prend $q = 0$, $f^-(x) = g^+(x) = 0$ et bien entendu $F_0(z) = 0$, (26) nous donne la solution du problème de [1]. C'est une conséquence du fait que dans ce cas on doit résoudre les deux problèmes de Riemann seulement pour les segments L_j.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] D. I. SCHERMANN, « Doklady Acad. Nauk SSSR », *27*, No. 4, 330–334 (1940).
[2] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equations*, Groningen 1953.
[3] S. GOGONEA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), *46*, fasc. 5, 526–529 (1969).