
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIANFRANCO CIMMINO

**Sulla estensione al caso di tre o più dimensioni di un
sistema differenziale del tipo di Beltrami**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 48 (1970), n.1, p. 14–19.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_1_14_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sulla estensione al caso di tre o più dimensioni di un sistema differenziale del tipo di Beltrami.* Nota (*) del Corrisp. GIANFRANCO CIMMINO.

SUMMARY. — Short study of a system of first order partial differential equations, called Beltrami's system of a mapping between n -dimensional real open sets; a weak version of this system is given, so that in particular the definition of a quasiconformal mapping may be also expressed in a weak sense.

1. — Nello studio della rappresentazione conforme di una superficie su un piano si incontra un sistema di due equazioni differenziali lineari del primo ordine in una coppia di funzioni reali di una coppia di variabili reali, detto generalmente di Beltrami. Esso costituisce una naturale estensione del sistema di Cauchy–Riemann, che è alla base della teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa.

Il cosiddetto operatore differenziale di Beltrami è quell'operatore differenziale lineare autoaggiunto del secondo ordine, che in questa estensione si viene a trovare al posto dell'operatore laplaciano Δ .

L'analogo di un sistema differenziale del tipo di Beltrami, quando si abbia una n -pla di funzioni reali di una n -pla di variabili reali con $n > 2$, è un sistema *non lineare*; si trova, però, che n funzioni, le quali verifichino un sistema cosiffatto, saranno tutte di conseguenza soluzioni di una stessa equazione differenziale *lineare* omogenea del secondo ordine, che estende in modo naturale l'equazione di Laplace.

Una rappresentazione quasiconforme di un aperto di $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ si può definire mediante una coppia di funzioni reali differenziabili di una coppia di variabili reali, per cui valga un sistema di Beltrami con coefficienti verificanti una certa disuguaglianza dipendente da un numero $M \geq 1$, da considerarsi come un *parametro di quasiconformità*; è precisamente $M = 1$ solo nel caso che la rappresentazione sia conforme. L'avvicinarsi del parametro M al valore 1 misura dunque, in un certo senso, l'approssimarsi dell'operatore differenziale di Beltrami al laplaciano Δ .

Passando dal caso bidimensionale a quello n -dimensionale, si trovano diversi tipi di rappresentazioni quasiconforme [1], ciascuno dei quali caratterizzato da una certa disuguaglianza per i coefficienti del corrispondente sistema di Beltrami; ognuna di queste disuguaglianze contiene sempre un parametro $M \geq 1$, che diventa $= 1$ solo quando la rappresentazione è conforme.

(*) Presentata nella seduta del 10 gennaio 1970.

L'operatore di Beltrami, per $n \geq 2$, si riduce, nel caso della rappresentazione conforme, a un operatore del tipo $\sum_k^n D_k (\mathfrak{D}_k)$, dove $\mathfrak{D}$ è una funzione, che, per $n = 2$, diventa la costante 1.

Poiché, per le rappresentazioni quasiconformi in due o più dimensioni, sono state date diverse definizioni [2], [3], che non richiedono a priori l'ipotesi della differenziabilità, ma portano poi di conseguenza la differenziabilità stessa, si presenta spontaneamente la questione di sostituire il sistema differenziale di Beltrami con una formulazione in senso debole del sistema stesso, nella quale si richieda il minimo possibile di regolarità a priori, sia per i coefficienti, sia per le funzioni che devono fornire la rappresentazione quasiconforme.

In questa Nota si indica un modo di ottenere la formulazione in senso debole del sistema di Beltrami, per cui non occorre richiedere neppure che siano supposte a priori continue le funzioni assoggettate a soddisfarlo. Ciò appare notevole soprattutto per il fatto che, come si è detto, il sistema non è più lineare, quando il numero n delle dimensioni è > 2 .

Lo studio delle questioni di regolarizzazione delle soluzioni deboli non viene qui affrontato. Esso dipenderà naturalmente dal tipo di rappresentazione quasiconforme preso in considerazione: come abbiamo ricordato, per $n > 2$, si hanno diversi di questi tipi, in corrispondenza a un dato valore del parametro M di quasiconformità. Avrà poi anche importanza il valore di M , che, come si è accennato, quando si avvicina ad 1, indica un certo modo di approssimarsi dell'operatore differenziale di Beltrami (che applicato a soluzioni abbastanza regolari deve dare per risultato 0) a un operatore del tipo $\sum_k^n D_k (\mathfrak{D}_k)$.

2. — Siano $x_k (\xi_1, \dots, \xi_n)$, per $k = 1, \dots, n$, funzioni reali differenziabili col determinante jacobiano positivo in tutti i punti $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ di un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^n$, e poniamo, per $k, i, j = 1, \dots, n$.

$$(1) \quad x_{ki} \doteq \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \quad , \quad J = \det \|x_{ki}\| > 0 \quad , \quad X_{ij} = \text{aggiunto di } x_{ij} \text{ in } J.$$

Siano poi γ_{ik} , per $i, k = 1, \dots, n$, gli elementi di una matrice simmetrica definita positiva, anch'essi funzioni di $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in A$, e poniamo

$$(2) \quad \Gamma = \det \|\gamma_{ik}\| > 0 \quad , \quad \Gamma_{ih} = \text{aggiunto di } \gamma_{ih} \text{ in } \Gamma.$$

Un sistema di Beltrami n -dimensionale sarà un sistema di n^2 equazioni del tipo

$$(3) \quad \sum_k^n \gamma_{ik} x_{kj} = X_{ij} \sqrt{\Gamma}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Esso è lineare soltanto per $n = 2$, riducendosi in tal caso a

$$\begin{aligned}\gamma_{11} x_{11} + \gamma_{12} x_{21} &= x_{22} \sqrt{\Gamma}, & \gamma_{11} x_{12} + \gamma_{12} x_{22} &= -x_{21} \sqrt{\Gamma}, \\ \gamma_{21} x_{11} + \gamma_{22} x_{21} &= -x_{12} \sqrt{\Gamma}, & \gamma_{21} x_{12} + \gamma_{22} x_{22} &= x_{11} \sqrt{\Gamma},\end{aligned}$$

dove si vede subito che le equazioni della prima colonna implicano quelle della seconda, e viceversa.

In generale, le (3) implicano le equazioni

$$(4) \quad \sum_i^n \Gamma_{ih} X_{ij} = \sqrt{\Gamma} x_{hj}, \quad h, j = 1, \dots, n,$$

da cui si ricava poi, uguagliando il determinante dei primi membri a quello dei secondi membri, per $n > 2$,

$$(5) \quad J = 1/\sqrt{\Gamma}.$$

Inoltre, se le x_{kj} sono pure differenziabili, dalle (3) segue che le $x_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$, per $j = 1, \dots, n$, sono tutte soluzioni dell'equazione lineare ellittica del secondo ordine

$$(6) \quad \sum_i^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_k^n \frac{\gamma_{ik}}{\sqrt{\Gamma}} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} = 0.$$

Dalle (4) si deducono poi ancora la (5) e le

$$(7) \quad \sum_j^n x_{hj} x_{kj} = \Gamma_{hk}/\Gamma,$$

dove i secondi membri, che indicheremo anche con g_{hk} , sono gli elementi della matrice inversa della $\|\gamma_{hk}\|$.

Si può anche osservare che il sistema di equazioni (3) equivale, in virtù di (5), al seguente

$$(8) \quad \sum_{ik}^n \gamma_{ik} x_{ih} x_{kj} = 0, \quad \text{per } h \neq j,$$

$$(9) \quad \sum_{ik}^n \gamma_{ik} x_{i1} x_{k1} = \dots = \sum_{ik}^n \gamma_{ik} x_{in} x_{kn} = 1.$$

Se poi indichiamo con $\mathfrak{L}$ l'operatore differenziale che figura nella (6)

$$(10) \quad \mathfrak{L} = \sum_i^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_k^n \frac{\gamma_{ik}}{\sqrt{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial \xi_k},$$

troviamo che le (8) e (9) equivalgono alle

$$(11) \quad \mathfrak{L} x_k = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$(12) \quad \mathfrak{L}(x_h x_j) = 0, \quad \text{per } h \neq j$$

$$(13) \quad \mathfrak{L}(x_1^2) = \dots = \mathfrak{L}(x_n^2) = 2/\sqrt{\Gamma}.$$

Un facile calcolo mostra infatti che è

$$(14) \quad \mathfrak{L}(x_h x_j) = x_h \mathfrak{L}x_j + x_j \mathfrak{L}x_h + \frac{2}{\sqrt{\Gamma}} \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} x_{ih} x_{jk},$$

sicché si vede che, se sono soluzioni dell'equazione lineare omogenea $\mathfrak{L}u = 0$ le $x_1, \dots, x_n$ e i loro prodotti due a due, varranno le (8). Da queste risulta poi che, indicati con $\rho_1, \dots, \rho_n$ certi fattori di proporzionalità, varranno le uguaglianze

$$(15) \quad \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} x_{kj} = \rho_j X_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

e di qui, se sono verificate anche le (13), risulta $\rho_1 = \dots = \rho_n = 1/J$ e la (5).

3. - Il sistema di Beltrami (3) si può dunque formalmente trasformare nel sistema (11), (12), (13), e questo si può sostituire con una formulazione debole, poiché esso consiste nell'esprimere che le funzioni $x_1, \dots, x_n$, i loro quadrati e i loro prodotti due a due verificano equazioni differenziali lineari autoaggiunte di tipo ellittico.

Per scrivere, alla maniera consueta, che è verificata in senso debole una equazione del second'ordine di forma variazionale occorre tuttavia supporre verificata una condizione sulle derivate prime della funzione incognita. La condizione che una funzione sia soluzione della equazione aggiunta di una equazione lineare alle derivate parziali non di forma variazionale, invece, si può mettere in una forma ancora più debole, cioè con ipotesi più deboli sulla funzione incognita [4].

In considerazione di ciò, cercheremo di trasformare il sistema (11), (12), (13) in un altro ancora, nel quale figurino soltanto operatori differenziali aggiunti di operatori lineari non di forma variazionale. A tale scopo, consideriamo gli operatori $\mathfrak{M}$ ed $\mathfrak{N}$ definiti da

$$(16) \quad \mathfrak{M} = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{ik}}{\sqrt{\Gamma}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k}, \quad \mathfrak{N} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \left(\frac{\gamma_{ik}}{\sqrt{\Gamma}} \cdot \right).$$

Si trova con un breve calcolo, supponendo l'esistenza di tutte le derivate occorrenti, che vale, per ogni terna φ, x_h, x_j di funzioni delle $\xi_1, \dots, \xi_n$, la seguente identità

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathfrak{N}(\varphi x_h x_j) &= x_h \mathfrak{N}(\varphi x_j) + x_j \mathfrak{N}(\varphi x_h) - x_h x_j \mathfrak{N}\varphi + \\ &+ 2\varphi \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{ik}}{\sqrt{\Gamma}} \frac{\partial x_h}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}. \end{aligned}$$

Pertanto il sistema (8) sarà verificato, se sarà

$$(18) \quad \mathfrak{N}\varphi = \mathfrak{N}(\varphi x_1) = \dots = \mathfrak{N}(\varphi x_n) = 0, \quad \mathfrak{N}(\varphi x_h x_j) = 0 \quad \text{per } h \neq j.$$

Inoltre, per $h = j$, la (17) diventa

$$(19) \quad \mathfrak{N}(\varphi x_j^2) = 2x_j \mathfrak{N}(\varphi x_j) - x_j^2 \mathfrak{N}\varphi + 2\varphi \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{ik}}{\sqrt{\Gamma}} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k},$$

e quindi, se, oltre alla (18), saranno verificate le

$$(20) \quad \mathfrak{N}(\varphi x_1^2) = \dots = \mathfrak{N}(\varphi x_n^2) = 2 \varphi / \sqrt{\Gamma},$$

dalle (15), che, come abbiamo osservato, discendono da (8), risulterà $\varrho_1 = \dots = \varrho_n = 1/J$, da cui le (9).

Se ne conclude che il sistema delle (8) e (9) si può sostituire con quello delle (18) e (20).

Per mettere poi in forma debole le (18) e (20), basta scrivere che, per ogni funzione $t(\xi_1, \dots, \xi_n) \in C_0^\infty(A)$, riesce

$$(21) \quad \int_A \varphi \mathfrak{N} t \, d\xi = \int_A \varphi x_k \mathfrak{N} t \, d\xi = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$(22) \quad \int_A \varphi x_h x_j \mathfrak{N} t \, d\xi = 0 \quad \text{per } h \neq j,$$

$$(23) \quad \int_A \varphi x_1^2 \mathfrak{N} t \, d\xi = \dots = \int_A \varphi x_n^2 \mathfrak{N} t \, d\xi = 2 \int_A \frac{\varphi}{\sqrt{\Gamma}} t \, d\xi.$$

Questa formulazione in senso debole della condizione che le $x_1, \dots, x_n$ siano soluzioni del sistema di Beltrami (3) consente, come si vede, di ridurre notevolmente le condizioni di regolarità richieste per i coefficienti γ_{jk} , come pure per le x_j .

4. - Ricordiamo ora la definizione dei diversi tipi di rappresentazioni quasi conformi n -dimensionali considerati in un mio precedente lavoro [1]. Essi si presentano naturalmente, in base all'osservazione che, se p e q sono interi, per cui $1 \leq p < q \leq n$, e se, per $m = 1, \dots, n$, con s_m si indica la somma dei quadrati di tutti gli $\binom{n}{m}^2$ minori di ordine m della matrice jacobiana J , riuscirà sempre

$$(24) \quad \binom{n}{p}^q s_q^p \leq \binom{n}{q}^p s_p^q,$$

dove il segno $=$ sussiste se e solo se è conforme la rappresentazione di A in $\mathbf{R}^n$ fornita dalle $x_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$, per $k = 1, \dots, n$. Per ogni numero $M \geq 1$, la classe, che indicheremo con $K_{pq}(M)$, delle rappresentazioni di A in $\mathbf{R}^n$, per cui riesce sempre

$$(25) \quad \binom{n}{q}^p s_p^q \leq M^{pq} \binom{n}{p}^q s_q^p,$$

fornisce un tipo di rappresentazioni quasiconformi col parametro di quasiconformità M ; ognuno di questi tipi di quasiconformità, caratterizzato dalla particolare scelta della coppia di interi p, q , dà luogo, nel caso particolare $M = 1$, alle ordinarie rappresentazioni conformi, per le quali le g_{hk} costituenti i secondi membri delle (7) sono nulle per $h \neq k$ e hanno tutte lo stesso valore

per $h = k = 1, \dots, n$. In tal caso, lo stesso fatto si verifica anche per la matrice $\|\gamma_{hk}\|$ inversa della $\|g_{hk}\|$ e l'operatore differenziale (10) diventa del tipo particolare $\sum_k^n \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\vartheta \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right)$.

Si può ora osservare che le $s_1, \dots, s_n$ introdotte poc'anzi sono gli invarianti ortogonali della matrice simmetrica definita positiva delle g_{hk} . Perciò la condizione che le $x_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$, per $k = 1, \dots, n$, diano una rappresentazione di classe $K_{pq}(M)$ si può anche esprimere dicendo che esse devono essere soluzioni di un sistema di Beltrami (3) tale che la matrice inversa $\|g_{hk}\|$ di quella $\|\gamma_{hk}\|$ dei coefficienti abbia gli invarianti ortogonali s_p, s_q soggetti alla limitazione (25).

Poiché abbiamo visto come si può esprimere in forma debole, con le (21), (22), (23), il fatto che le $x_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ debbano verificare il sistema (3), ne risulta che la nostra definizione di quasiconformità non richiede, dunque, ove si faccia uso di tale forma debole, la differenziabilità delle $x_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. CIMMINO, *Sulle rappresentazioni pseudo-conformi*, Istituto Nazionale di Alta Matematica, «Symposia Mathematica», 2, 85-93 (1968).
- [2] O. LEHTO e K. I. VIRTANEN, *Quasikonforme Abbildungen*, Springer-Verlag 1965.
- [3] P. CARAMAN, *Homeomorfisme cvasiconforme n-dimensionale*, «Ed. Ac. Rep. Soc. Romania», (1968).
- [4] G. CIMMINO, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*, «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa», (2), 7, 73-96 (1938).