Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Cercignani

Sull'universalità del profilo delle onde d'urto deboli in gas ionizzati e miscele

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.6, p. 486–492.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_6_486_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Meccanica. — *Sull'universalità del profilo delle onde d'urto deboli in gas ionizzati e miscele.* Nota di CARLO CERCIGNANI, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

ABSTRACT. — The hyperbolic tangent profile found by G. I. Taylor for a neutral gas is shown to remain valid for the shock profile of a large class of fluid models in presence of various dissipative processes. This class includes all the most usual models for mixtures and ionized gases.

1. – INTRODUZIONE.

Com'è noto [1] le onde d'urto cessano d'essere superfici di discontinuità quando si tiene conto della viscosità del gas e di altre forme di dissipazione; in tal caso, il passaggio dai valori a monte a quelli a valle avviene con continuità attraverso uno strato sottile, che si può appunto chiamare lo strato d'urto. La determinazione dell'andamento delle diverse grandezze (densità, velocità, temperatura, etc.) all'interno dello strato d'urto è un problema interessante che si può trattare con le equazioni di Navier–Stokes–Fourier (N.S.F.) nel caso di un gas viscoso e conduttore del calore. La teoria classica è dovuta a Becker [2] e descritta da Hayes [1]; la determinazione del profilo avviene in generale attraverso calcoli numerici.

Fin dal 1910 G. I. Taylor mostrò (limitandosi al caso di un gas che obbedisce la legge dei gas perfetti) che se l'onda d'urto è sufficientemente debole è possibile determinare analiticamente il profilo di tutte le quantità, ed esso risulta dato per tutte (a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto alla forza dell'urto) dalla media dei valori a monte e a valle più la semidifferenza tra gli stessi valori moltiplicata per la tangente iperbolica di x/λ dove x è l'ascissa che varia da $-\infty$ a $+\infty$ nel passaggio da monte a valle e λ una lunghezza caratteristica che fornisce una misura dello spessore dello strato d'urto. Allo stesso risultato sono pure pervenuti con procedimenti diversi Lighthill [3] e Hayes [4], ammettendo anche equazioni di stato più generali di quella dei gas perfetti.

Tutti questi autori partono dall'osservazione fondamentale che i cambiamenti di entropia sono molto piccoli attraverso un'onda di urto debole; questa circostanza giustifica una serie di approssimazioni che conducono ad una equazione differenziale molto semplice, che, integrata analiticamente, conduce alla legge della tangente iperbolica.

L'importanza dello studio delle onde d'urto deboli con equazioni ottenute da quelle di NSF per via approssimata risulta aumentata dall'osser-

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1969.

vazione, messa in dubbio fino a una diecina di anni fa [1] ma ormai confermata (almeno per i gas monoatomici) dai più recenti risultati teorici e sperimentali, che le equazioni di NSF cadono in difetto per le onde d'urto forti e quindi non c'è ragione di insistere nella soluzione di tali equazioni se non nel caso delle onde d'urto deboli, per cui d'altra parte si possono ottenere equazioni più semplici. La ragione dell'inadeguatezza delle equazioni di NSF per onde d'urto forti risiede, come è noto, nel fatto che per tali onde lo spessore λ risulta confrontabile col libero cammino medio delle molecole del gas.

Secondo una congettura di Hayes [1] il profilo di tangente iperbolica dovrebbe restare valido in circostanze più generali, cioè in presenza di altri processi dissipativi, come quelli presenti in miscele e gas ionizzati. Questa congettura è stata verificata in tutti i casi particolari in cui le equazioni sono state sottoposte alle approssimazioni di onda d'urto debole, cioè un modello descrivente una miscela binaria [5] e uno relativo a un plasma [6].

Naturalmente, man mano che il modello di fluido diventa più complicato, c'è da attendersi che la mole dei calcoli divenga notevole, cosicché sembra opportuno sviluppare una tecnica generale suscettibile di essere applicata su modelli del tutto generali. Un primo passo in questa direzione è contenuto nei lavori di Grad [7] e Hu [6]; tuttavia, il fatto che questi autori lavorino sulle equazioni già integrate una volta, facendo intervenire quindi i valori a monte delle grandezze fisiche, e che considerino un modello speciale di fluido, non sembra contribuire alla intellegibilità e generalità del metodo.

Scopo di questo lavoro è quello di sviluppare un metodo generale da applicare a modelli di fluido di una classe piuttosto ampia. Entro questa classe si determinerà la sottoclasse di modelli per cui si applica la legge della tangente iperbolica di Taylor, dando nello stesso tempo un procedimento puramente algebrico per il calcolo dello spessore λ dello strato d'urto in termini di coefficienti di trasporto del gas. Risulterà così verificata per modelli abbastanza generali la congettura sopra ricordata di Hayes, insieme con la circostanza, pure congetturata da Hayes [1], che la lunghezza λ dipenda linearmente dai vari coefficienti di trasporto che compaiono nel modello.

2. – IL PROCEDIMENTO DI CALCOLO.

Il procedimento di calcolo è di carattere perturbativo e si basa sull'osservazione, utilizzata anche da Hu [6], che un'onda d'urto debole ha uno spessore elevato e può considerarsi come prossima ad uno stato uniforme. Si può allora applicare un procedimento di calcolo del tutto generale, che si può adottare quando un'equazione (o un sistema di equazioni) ammette più di una soluzione; se una delle due soluzioni (lo stato uniforme) esiste per qualsiasi valore di un parametro (per esempio il numero di Mach), mentre la seconda (l'onda d'urto) esiste solo a partire da un certo valore dello stesso parametro (numero di Mach a monte M maggiore di 1), allora si può analizzare il comportamento della seconda soluzione, nell'intorno del valore critico ($M = 1$), con un procedimento di perturbazione della prima soluzione.

Il procedimento generale è descritto altrove [8]; qui ci limitiamo a spiegare la sua applicazione al caso delle onde d'urto in un fluido che in condizioni di flusso stazionario unidimensionale, è retto da un sistema di equazioni differenziali del tipo seguente:

$$\mathfrak{N}(u) = \mathfrak{D}(u) \tag{2.1}$$

dove u è un vettore simbolico (n–upla), che riassume in maniera concisa tutte le variabili dipendenti del sistema (densità, velocità, temperatura, concentrazioni, campi elettrici, magnetici, correnti elettriche, etc.), $\mathfrak{N}$ è un operatore nonlineare (o meglio quasilineare) contenente solo derivate del primo ordine, mentre $\mathfrak{D}$ contiene solo derivate del secondo ordine ed è lineare (o almeno, è lineare rispetto a una perturbazione del primo ordine di uno stato uniforme, cioè, $\mathfrak{D}(u_0 + \varepsilon u_1) = \varepsilon \mathfrak{D}_0 u_1 + O(\varepsilon^2)$, dove $\mathfrak{D}_0$ è un operatore differenziale contenente solo derivate seconde). Sia $\mathfrak{N}$ che $\mathfrak{D}$ hanno la proprietà di annullarsi se u è costante. Ci si convince facilmente che nello schema (2.1) rientra un gran numero di modelli di fluido, in quanto che, in condizioni stazionarie, le equazioni esprimono, per esempio, il bilancio tra processi di tipo convettivo, espressi usualmente da termini non lineari contenenti le derivate prime, e processi di tipo diffusivo, espressi di solito da termini contenenti derivate seconde e lineari (o più correttamente di nonlinearità non critica).

Se si considera un'onda d'urto debole, il suo spessore sarà elevato, come accennato sopra; se si indica con ε un parametro che indica la forza dell'urto, allora lo spessore λ è dato da λ_0/ε dove λ_0 resta finito per $\varepsilon \to 0$. Adottando allora λ come unità per le lunghezze, la (2.1) diviene

$$\tilde{\mathfrak{N}}(u) = \varepsilon \tilde{\mathfrak{D}}(u) \tag{2.2}$$

dove $\tilde{\mathfrak{N}}$, $\tilde{\mathfrak{D}}$ sono $\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{D}$ espressi con le nuove variabili (il secondo diviso anche per λ_0). Con questo cambiamento di variabili, il parametro ε che indica la forza dell'urto è stato introdotto esplicitamente nelle equazioni.

Il procedimento da adottare adesso è quello di sviluppare u in una serie di potenze di ε:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots \tag{2.3}$$

con la condizione che u_0 sia uno stato uniforme. Si ha allora che i termini di ordine zero si annullano per la proprietà di $\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{D}$ di annullarsi per u costante, mentre all'ordine 1, darà contributo solo $\mathfrak{N}$ e precisamente nella forma

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \frac{du_{1k}}{dx} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.4}$$

dove $\{u_{1k}\}$ sono le componenti della n–upla u_1 e A_{ik} una matrice i cui elementi dipendono da u_0. La (2.4) ha sempre la soluzione $du_{1k}/dx = 0$ che però non ci interessa, in quanto ci porterebbe da uno stato uniforme a un altro uniforme, e sappiamo già che tutti gli stati uniformi sono soluzione della (2.1). Occorre quindi di cercare soluzioni non nulle del sistema omogeneo (2.4) nelle incognite $v_k = \mathrm{d}u_{1k}/\mathrm{d}x$. Come è noto, questo richiede che il determinante della matrice $A_{ik}(u_0)$ sia nullo. Se Det $\|A_{ik}\|$ ha uno zero per $u_0 = u_0^*$ e $\|A_{ik}(u_0^*)\|$ ha caratteristica $(n-1)$, allora $u_0 = u_0^*$ e procediamo alla seconda approssimazione. Per esempio, nel caso di un gas neutro, si trova, come era da attendersi, che $\|A_{ik}\|$ ha uno zero se la velocità è nulla (discontinuità di contatto) oppure uguale in valore assoluto a quello del suono (onda d'urto ordinaria).

La seconda approssimazione dà luogo a un sistema del tipo seguente:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\frac{\mathrm{d}u_{2k}}{\mathrm{d}x} + \sum_{j,k=1}^{n} A_{ijk}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_{1j}u_{1k}) = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}\frac{\mathrm{d}^2 u_{1k}}{\mathrm{d}x^2} \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{2.5}$$

dove $|||A_{ijk}|||$ è una tabella tridimensionale di numeri e $\|B_{ik}\|$ una nuova matrice, dipendenti da u_0. Poiché Det $\|A_{ik}\| = 0$, la (2.5) può avere soluzione solo se è soddisfatta la condizione

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_i A_{ijk}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_{1j}u_{1k}) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i B_{ik}\frac{\mathrm{d}^2 u_{1k}}{\mathrm{d}x^2} \tag{2.6}$$

dove $\{\alpha_i\}$ è la soluzione del sistma omogeneo corrispondente alla matrice $\|A_{ki}\|$ trasposta di $\|A_{ik}\|$. Tale soluzione è determinata a meno di un inessenziale fattore, grazie al fatto che, per ipotesi, la caratteristica di $\|A_{ik}\|$ è $(n-1)$. Analogamente determinata è la soluzione del sistema omogeneo corrispondente alla matrice $\|A_{ik}\|$. Potremo quindi scrivere la soluzione della (2.4) nella forma

$$u_{1k} = \beta_k v \qquad (k = 1,\cdots,n) \tag{2.7}$$

dove i β_k dipendono solo dagli elementi A_{ik} (e quindi da u_0), mentre v è una funzione arbitraria da determinarsi (le costanti di integrazione possono considerarsi nulle, pur di normalizzare opportunamente la relazione tra i dati a monte e u_0^*). Inserendo l'Eq. (2.7) nella (2.6), si ottiene:

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_i A_{ijk}\beta_j\beta_k\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}x} = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i B_{ik}\beta_k\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\,. \tag{2.8}$$

Posto:

$$a = -\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i A_{ijk}\beta_j\beta_k v^+ \tag{2.9}$$

$$b = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i B_{ik}\beta_k \tag{2.10}$$

$$\lambda = b/a \qquad (a \neq 0) \tag{2.11}$$

dove v^+ è il valore a valle di v, la Eq. (2.8) diviene (supposto $a \neq 0$):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{v^+}\right)^2 = -\lambda \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{v}{v^+}\right) \tag{2.12}$$

che è l'equazione atta a determinare v e quindi, attraverso la (2.7), la soluzione al primo ordine in ε.

Il procedimento che conduce alla (2.12) può fallire in due casi:

1) La caratteristica della matrice $A_{ik}(u_0^*)$ non è $n-1$ ma $n-r$ $(r>1)$. In tal caso, la soluzione α_i del sistema omogeneo trasposto non è più determinata a meno di un fattore, ma esistono r soluzioni linearmente indipendenti $\alpha_i^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, \cdots, r)$; in corrispondenza di ciascuna di queste si ottiene una equazione del tipo (2.6). In concomitanza però, la soluzione della (2.4) risulta espressa come combinazione lineare di r soluzioni indipendenti $v^{(\varrho)}$ $(\rho = 1, \cdots, r)$

$$u_{1k} = \sum_{\varrho=1}^{r} \beta^{(\varrho)} v^{(\varrho)}. \tag{2.13}$$

Sostituendo questa soluzione nelle r relazioni ottenute ponendo $\alpha_i^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, \cdots, r)$ in luogo di α_i nella (2.6), si ottiene un sistema di r equazioni differenziali nelle r incognite $v^{(\varrho)}$.

In questo caso quindi il metodo è ancora applicabile, ma porta a un sistema di equazioni differenziali, anziché all'unica equazione (2.12).

2) La quantità a data dalla (2.9) è nulla. Tale caso sembra estremamente improbabile, ma, se dovesse verificarsi, si dovrebbe concludere che non esistono onde d'urto, per il modello considerato, in un intorno dello stato uniforme $u_0 = u_0^*$.

3. – Il profilo universale.

Salvo i due casi eccezionali discussi al termine del precedente paragrafo, il profilo di un'onda d'urto debole per un modello di fluido basato su equazioni del tipo (2.1) risulta dato dell'equazione (2.12). Integrando quest'ultima, troviamo:

$$1 - (v/v^+)^2 = \lambda \frac{d}{dx}(v/v^+) \tag{3.1}$$

dove la costante d'integrazione risulta fissata dalla condizione che $v \to v^+$ con derivata nulla per $x \to +\infty$. La (3.1) si integra subito per separazione delle variabili, trovando:

$$v/v^+ = \mathrm{T}h\,[(x - x_0)/\lambda] \tag{3.2}$$

dove x_0 è un'altra costante d'integrazione, legata alla posizione del centro dell'onda d'urto. La (3.2) fornisce la struttura delle onde d'urto deboli, mostrando che per tutti i modelli considerati, salvo i casi eccezionali sopra discussi, vale il profilo della tangente iperbolica, scoperto da G. I. Taylor per il caso molto particolare di un gas neutro che obbedisce alla legge dei gas perfetti. Il parametro λ definito dalla (2.11) viene a giocare il ruolo di spessore dell'onda d'urto, in quanto per $|x - x_0| \gg \lambda$ risulta $v \simeq \pm v^+$ cioè sono già raggiunti i valori a monte e a valle. Si noti anche che se risulta $\lambda = 0$ (cioè per la (2.11), se $b = 0$), l'onda d'urto risulta senza struttura, cioè è una vera e propria discontinuità nell'ambito del modello considerato.

La natura particolare del fluido considerato interviene dunque solo nell'espressione dello spessore λ che è legato attraverso la (2.11) alle quantità a e b, definite dalle (2.9) e (2.10). Mentre in a intervengono soltanto i valori a monte e a valle (attraverso u_0 e v^+), in b intervengono, in quanto contenuti negli elementi della matrice $\| B_{ik} \|$, i coefficienti di trasporto del fluido considerato. λ risulta così una combinazione lineare di tali coefficienti di trasporto, confermando la congettura di Hayes ricordata nell'introduzione.

Sarebbe interessante confrontare il risultato ottenuto con qualche risultato sperimentale sulla struttura delle onde d'urto in miscele; sembra però che gli unici esperimenti disponibili siano quelli di Center [9], relativi a un numero di Mach superiore a 2 e quindi un po' fuori della portata del nostro procedimento perturbativo. È possibile però confrontare il nostro risultato con una teoria più complicata basata sulla soluzione numerica di modelli cinetici; tale soluzione, per $M = 1{,}04$ in una miscela di elio e argon con frazione molare di argon $f_A = 0.1$ è stata ottenuta da Abe e Oguchi [10]. Abbiamo confrontato gli andamenti delle velocità delle due componenti e quella media, nonché le due temperature, come risultano dai calcoli di Abe e Oguchi e le corrispondenti curve previste dalla nostra teoria.

I risultati sono in ottimo accordo per quel che riguarda la simmetria delle curve rispetto all'origine e anche da un punto di vista quantitativo. Naturalmente la nostra teoria non prevede la separazione delle due componenti; tale separazione potrebbe ottenersi solo spingendo i calcoli all'ordine ε^2, ma in tal caso le equazioni macroscopiche, in generale, non saranno più valide, e si dovrà far uso delle equazioni di Boltzmann per una miscela.

4. – OSSERVAZIONI CONCLUSIVE.

Lo scopo principale del presente lavoro era quello di dimostrare la validità della congettura di Hayes [1] per la struttura delle onde d'urto deboli; la congettura risulta pienamente verificata per una larga classe di modelli.

Il confronto con una teoria più complicata (e, in linea di principio più accurata) risulta favorevole, nel senso che i risultati sono confrontabili, ma sono ottenuti nel nostro caso senza bisogno di calcoli numerici. Inoltre, il nostro procedimento fornisce, per ogni dato modello di fluido, una espressione esplicita, ottenibile con sole operazioni algebriche per la dipendenza dello spessore delle onde d'urto debole dai vari coefficienti di trasporto.

BIBLIOGRAFIA.

[1] W. D. HAYES, in « Fundamentals of Gas Dynamics », p. 416 e sgg. – H. W. Emmans, ed. (Princeton 1958).
[2] R. BECKER, in « Z. Physik », *8*, 321 (1922).
[3] M. J. LIGHTHILL, in « Surveys in Mechanics G. I. Taylor 70th Anniversary Volume », p. 250 (Cambridge 1956).
[4] W. D. HAYES, in « Proc. Ninth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics » (Bruxelles 1956).
[5] S. P. DYAKOV, « J. Experimental Theoretical Physics, U.S.S.R. », *23*, 425 (1952).
[6] P. N. HU, « Physics of Fluids », *9*, 89 (1966).
[7] H. GRAD, « Communications on Pure and Applied Mathematics », *5*, 257 (1952).
[8] C. CERCIGNANI, « Bifurcation Problems in Fluid Mechanics » (in corso di stampa).
[9] R. E. CENTER, « Physics of Fluids », *10*, 1777 (1967).
[10] K. ABE e H. OGUCHI, in « Rarefied Gas Dynamics », Leon Trilling and H. Y. Wachman, ed. (New York 1969).