Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Santoro

Un problema al contorno per una equazione iperbolica del terzo ordine non lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.6, p. 476–478.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_6_476_0>

Equazioni alle derivate parziali. — *Un problema al contorno per una equazione iperbolica del terzo ordine non lineare* (*). Nota di PAOLO SANTORO, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — Existence theorems are given for a hyperbolic boundary value problem (E) (C).

1. Sia T l'insieme dei punti del piano (x, y) tali che

$$T = \{(x, y); 0 < x, 0 < y, x + y < 1\}$$

e sia $\bar{T}$ la sua chiusura, ∂T la frontiera.

Indichiamo con τ la direzione di coseni direttori $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e con $\Gamma(\bar{T})$ la classe delle funzioni che sono nella classe $C^2(\bar{T})$ e dotate della derivata $\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ continua in $\bar{T}$.

Sia $f(x, y, r)$ una funzione continua per $(x, y) \in \bar{T}$, $-\infty < r < \infty$.

Posto $Ez = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} z$ si cercano le funzioni $z \in \Gamma(\bar{T})$ per cui risulti

$$\text{(E)} \qquad Ez = f(x, y, z) \qquad (x, y) \in T,$$

$$\text{(C)} \qquad z = h(x, y) \qquad (x, y) \in \partial T$$

essendo $h(x, y)$ traccia su ∂T di una funzione che sia di classe $C^2(\bar{T})$.

Al riguardo F. Rosati in [1], ha esaminato il problema lineare

$$\text{(E')} \qquad Eu = b(x, y) \qquad (x, y) \in T$$

$$\text{(C)} \qquad u = h(x, y) \qquad (x, y) \in \partial T$$

con $b(x, y)$ ed $h(x, y)$ funzioni assegnate, $b \in C(\bar{T})$, h traccia su ∂T di una funzione di classe $C^2(\bar{T})$. F. Rosati dimostra che l'operatore E ammette inverso destro, che nel seguito indicheremo con E^+, e quindi l'equazione $Eu = b$ ha soluzioni date da $u = v + E^+ b$ dove v è un qualunque elemento di $\Gamma(\bar{T})$ ed appartenente al nucleo $N(E)$ di E, precisamente $v = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(x + y)$ con $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[0, 1]$, ed inoltre

$$E^+ b = \int_T G(x, y, \rho, \sigma) \, b(\rho, \sigma) \, d\rho \, d\sigma$$

dove

$$G(x, y, \rho, \sigma) =$$

$$= \frac{1}{4}(x + y - \rho - |y - \rho| - |x - \rho - \sigma| + |x + y - \rho - |y - \rho| - |x - \rho - \sigma||).$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Contratto di ricerca del C.N.R., n. 115. 3083 0 5175.

(**) Nella Seduta del 13 dicembre 1969.

F. Rosati ha, tra l'altro, anche dimostrato che il problema (E′) (C) ammette soluzioni *se e solo se* si ha

$$g(x, 0) - g(1 - x, 0) +$$
$$+ \int_T [G(x, 1 - x; \rho, \sigma) - G(1 - x, x; \rho, \sigma)]\, b(\rho, \sigma)\, d\rho\, d\sigma = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

dove

$$g(x, y) = h(x, y) + h(1 - x - y, x) + h(y, 1 - x - y)$$

e tutte le soluzioni $u(x, y)$ di (E′) (C) sono date da

$$u(x, y) = v(x, y) + \mathrm{H}(h) + \int_T \mathrm{K}(x, y, \rho, \sigma)\, b(\rho, \sigma)\, d\rho\, d\sigma$$

dove $v \in \mathrm{N}(\mathrm{E})$ ed è tale che $v = 0$ su $\partial \mathrm{T}$, essendo

$$\mathrm{H}(h) = h(x, 0) + h(0, y) - h(0, 0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Big[[h(r + s, 0) - h(r + s, 1 - r - s) + h(0, 1 - r - s)]\Big]_{(0,0)}^{(x,y)}$$

$$\mathrm{K}(x, y, \rho, \sigma) = \mathrm{G}(x, y, \rho, \sigma) + \frac{1}{2}\Big[[\mathrm{G}(r + s, 1 - r - s; \rho, \sigma)]\Big]_{(0,0)}^{(x,y)} \text{ (1)}.$$

2. Indichiamo nel seguito con $\mathrm{I}(\bar{\mathrm{T}})$ la classe delle funzioni $z \in \Gamma(\bar{\mathrm{T}})$ e tali che $z = h$ su $\partial \mathrm{T}$.

TEOREMA 1. *Il problema* (E) (C) *ammette soluzioni se*

α) *per ciascun* $(x, y) \in \bar{\mathrm{T}}$, $f(x, y, r)$ *è continua in* r;
β) *per ciascun* r, $-\infty < r < \infty$, $f(x, y, r)$ *è continua in* $\bar{\mathrm{T}}$;
γ) *esiste* $\mathrm{M} > 0$ *tale che* $|f(x, y, r)| \leq \mathrm{M}$ *per* $(x, y) \in \bar{\mathrm{T}}$; $-\infty < r < \infty$
δ) *per ogni* $z(x, y) \in \mathrm{I}(\bar{\mathrm{T}})$ *il problema*

$$\mathrm{E}u = f(x, y, z(x, y)) \qquad (x, y) \in \mathrm{T}$$
$$u = h(x, y) \qquad (x, y) \in \partial \mathrm{T}$$

ammette soluzioni.

Dimostrazione. Da α), β), δ) segue che la trasformazione

$$\mathcal{T} z = \mathrm{H}(h) + \int_T \mathrm{K}(x, y, \rho, \sigma)\, f(\rho, \sigma, z(\rho, \sigma))\, d\rho\, d\sigma$$

(con $\mathrm{H}(h)$ e $\mathrm{K}(x, y, \rho, \sigma)$ come sono state definite in 1) trasforma l'insieme $\mathrm{I}(\bar{\mathrm{T}})$ in sè. Dalle ipotesi segue anche che $\mathcal{T} z$ è continua e che l'insieme $\mathcal{T}(\mathrm{I}(\bar{\mathrm{T}}))$ è chiuso, è limitato ed è formato da funzioni equicontinue ed equilimitate e quindi è un compatto. La tesi segue dal teorema di Schauder.

(1) Data una funzione $f(x, y)$ con il simbolo $\Big[[f(x, y)]\Big]_{(0,0)}^{(x,y)}$ indichiamo l'espressione $f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)$.

TEOREMA 2. *Il problema* (E) (C) *ammette soluzioni se valgono le ipotesi* α), β), δ) *del teorema* I *ed inoltre*

γ') $|f(x,y,r)| \leq \alpha(x,y) + \beta(x,y)|r|^q$, *dove* $0 \leq q < 1$, *ed* $\alpha(x,y)$ *e* $\beta(x,y)$ *sono funzioni non negative continue in* $\overline{T}$.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{H} = (\sup H(h) : (x,y) \in \overline{T})$ e con

$$\mathcal{K} = (\sup K(x,y,\rho,\sigma), (x,y,\rho,\sigma) \in \overline{T} \times \overline{T})$$

e sia r^0 tale che

$$r^0 - r^{0q} \mathcal{K} \int_T \beta(\rho,\sigma)\, d\rho\, d\sigma > \mathcal{H} + \mathcal{K} \int_T \alpha(\rho,\sigma)\, d\rho\, d\sigma . \tag{1}$$

Indichiamo poi con $\bar{f}$ la funzione

$$\bar{f}(x,y,r) = \begin{cases} f(x,y,r) & \text{se } |r| \leq r^0 \\ f\left(x,y,r^0 \frac{r}{|r|}\right) & \text{se } |r| > r^0 . \end{cases}$$

La funzione $\bar{f}$ soddisfa oltre che l'ipotesi α), β), δ) anche l'ipotesi γ) del teorema 1 poiché da γ') segue $|\bar{f}(x,y,r)| \leq \alpha(x,y) + \beta(x,y)|r|^q$; $(x,y) \in \overline{T}$, e quindi per la continuità di $\alpha(x,y)$ e $\beta(x,y)$ segue la limitatezza di $\bar{f}$. In forza poi del teorema 1 si ha che la trasformazione

$$\mathcal{T}^1 z = H(h) + \int_T K(x,y,\rho,\sigma)\, \bar{f}(\rho,\sigma,z(\rho,\sigma))\, d\rho\, d\sigma$$

ammette punto unito u ed esso è tale che $|u| < r^0$ e di conseguenza per $(x,y) \in \overline{T}$, $f(x,y,u(x,y)) = \bar{f}(x,y,u(x,y))$ e perciò la u è anche punto unito per la trasformazione $\mathcal{T}$.

Osservazione. Se in γ') si suppone $q = 1$ la (1) diventa

$$r^0\left(1 - \mathcal{K} \int_T \beta(\rho,\sigma)\, d\rho\, d\sigma\right) > \mathcal{H} + \mathcal{K} \int_T \alpha(\rho,\sigma)\, d\rho\, d\sigma \tag{2}$$

ed un r^0 che la soddisfa esiste se $1 - \mathcal{K} \int_T \beta(\rho,\sigma)\, d\rho\, d\sigma > 0$. Di qui e dal teorema 2 si ha

TEOREMA 3. *Il problema* (E) (C) *ammette soluzioni se sono soddisfatte le ipotesi* α), β), δ) *del teorema* I *ed inoltre*

$$\gamma'') \begin{cases} |f(x,y,r)| \leq \alpha(x,y) + \beta(x,y) r \;,\quad \alpha(x,y) \text{ e } \beta(x,y) \text{ continue in } \overline{T}, \\ 1 - \mathcal{K} \int_T \beta(\rho,\sigma)\, d\rho\, d\sigma > 0 . \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. ROSATI, *Un problema al contorno per un'equazione iperbolica del terzo ordine*, « Ann. Sc. Nor. Pisa », (3), *20*, 613–623 (1966).