Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cezar Avramescu

Sur l'existence des solutions presque-périodiques des systèmes différentielles du premier ordre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.6, p. 468–471.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_6_468_0>

Analisi matematica (Equazioni differenziali). — *Sur l'existence des solutions prèsque-périodiques des systèmes différentielles du premier ordre.* Nota di CEZAR AVRAMESCU, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — La presente Nota è dedicata allo studio dell'esistenza di soluzioni quasi-periodiche per una classe di equazioni differenziali ordinarie.

1. Soit $f(t, x)$ une fonction à valeurs dans R^n, définie et continue dans $\Delta = \{(t, x)\,;\, t \geq 0\,,\, \|x\| < \rho\}$, où par $\|\cdot\|$ nous avons désignée la norme de R^n. On suppose que par tout point de Δ il passe une seule solution de l'équation,

$$x' = f(t, x)\,. \tag{S}$$

Soit $\omega(t, r)$ une fonction scalaire, définie et continue dans $D = \{(t, r)\,;\, t \geq 0\,,\, |r| < \rho\}$; on considère l'équation *de comparaison*

$$r' = \omega(t, r)\,. \tag{E}$$

On suppose que la condition d'unicité de la solution soit satisfaite dans tout point de D.

Soit encore $V(t, x)$ une fonction scalaire, continue et différentiable dans tout point de D et telle que $|V(t, x)| < \rho$ dans D. Désignons par $V'(t, x)$ la dérivée de la fonction $V(t, x)$ par rapport au système (S). Si l'on suppose que,

$$V'(t, x) \leq \omega(t, V(t, x))\,, \tag{1}$$

dans D, alors pour toute solution $x(t)$ du système (S) et pour toute solution $r(t)$ de l'équation (E), telles que $V(t_0, x(t_0)) \leq r(t_0)$, on a l'inégalité

$$V(t, x(t)) \leq r(t)\,, \tag{2}$$

inégalité valable pour tout $t \geq t_0$ appartenant à l'intervalle commun de définition des fonctions $x(t)$ et $r(t)$.

De l'inégalité (2) il résulte que, si l'on admet des hypothèses adéquates pour la fonction V, alors les propriétés des solutions de l'équation de comparaison (E) sont transportées aux solutions du système (S). Cette idée a été plusieurs fois utilisée, par diverses auteurs, dans l'étude du comportement des solutions du système (S). Par exemple elle a été utilisée par R. Conti [1] dans le problème du prolongement des solutions, par C. Corduneanu [2] dans

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1969.

la théorie de la stabilité, par P. Talpalaru [3] dans le problème de l'existence des solutions bornées, par C. Avramescu [4] dans le problème de l'existence des solutions qui ont limite quand $t \to +\infty$, etc. (Pour les détails concernant cette méthode, on renvoie le lecteur aux livres de G. Sansone et R. Conti [5] et de T. Yoshizawa [6]).

Nous allons utiliser la méthode de la fonction de Liapounoff pour établir l'existence des solutions prèsque-périodiques du système (S).

2. Nous allons démontrer d'abord le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Admettons les hypothèses suivantes*:

1) $V(t, 0) \equiv 0$; $V(t, x) \geq a(\|x\|)$, *$a(r)$ étant une fonction continue et non-décroissante, avec* $a(0) = 0$;

2) *pour toute fonction continue $x(t)$, avec $\|x(t)\| < \rho$, a lieu l'inégalité*

$$V\left(t, \int_a^t f(s, x(s))\, ds\right) \leq \int_a^t V'(s, x(s) - x(a))\, ds, \tag{3}$$

pour tous t, a appartenant à l'intervalle de définition de la fonction $x(t)$, avec $t \geq a \geq 0$;

3) $V'(t, x) \leq \omega(t, V(t, x))$ *dans* D;

4) *$\omega(t, r)$ est une fonction non-décroissante par rapport à r, pour tout t fixé;*

5) *l'équation* (E) *admet une solution $r(t)$ prèsque-périodique pour $t \geq 0$.*

Alors pour tout $t_0 \geq 0$, il existe un nombre positif $\delta = \delta(t_0)$ tel que toute solution $x(t)$ du système (S), *avec $\|x(t_0)\| < \delta$ soit prèsque-périodique pour $t \geq t_0$.*

Si de plus, il existe une fonction $b(r)$, avec les mêmes propriétés que la fonction $a(r)$, telle que $V(t, x) \leq b(\|x\|)$, alors le nombre δ ne dépend pas de t_0.

Démonstration. Comme de l'hypothèse 3) résulte l'inégalité (1), alors on a l'inégalité (2), pour toute solution $x(t)$ du système (S) qui satisfait à la condition

$$V(t_0, x(t_0)) \leq r(t_0), \tag{4}$$

et cette inégalité est valable pour tout $t \geq t_0$ appartenant à l'intervalle de définition de la solution $x(t)$. Compte tenu de l'hypothèse 1), il existe un nombre positif δ, tel que pour $\|x(t_0)\| < \delta$ l'inégalité (4) soit remplie. (Si l'existence de la fonction $b(r)$ est assurée, alors $\delta = \sup_{t \geq t_0} b^{-1}(r(t))$). De l'inégalité (2) on tire que

$$\|x(t)\| \leq a^{-1}(r(t)), \tag{5}$$

et comme $r(t)$ est bornée sur le demi-axe $t \geq 0$, il s'ensuit que la solution $x(t)$ est définie pour tout $t \geq t_0$.

De l'hypothèse 3) on déduit, compte tenu de l'inégalité (2), de la monotonie de ω et de l'hypothèse 2), les inégalités suivantes:

$$V(t, x(t)-x(a)) = V\left(t, \int_a^t x'(s)\, ds\right) = V\left(t, \int_a^t f(s, x(s))\, ds\right) \leq \int_a^t V'(s, x(s))\, ds \leq$$

$$\leq \int_a^t \omega(s, V(s, x(s)))\, ds \leq \int_a^t \omega(s, r(s))\, ds = r(t) - r(a),$$

d'où l'on déduit que,

$$\| x(t+\tau) - x(t) \| \leq a^{-1}(r(t+\tau) - r(t)), \tag{6}$$

pour tout $\tau \geq 0$ et tout $t \geq t_0$. Comme la fonction $r(t)$ est par hypothèse prèsque–périodique, il en résulte que la fonction $x(t)$ est prèsque–périodique sur le demi–axe $t \geq t_0$.

Dans le théorème 1 on ne peut pas prendre, comme d'habitude, $V(t, x) = \| x \|$; ce cas est contenu dans le théorème qui suit.

THÉORÈME 2. *Admettons que les hypothèses* 4) *et* 5) *du théorème 1 sont satisfaites et que* $V(t, 0) \equiv 0$.

Si les inégalités

$$\begin{cases} \| f(t, x) \| \leq \omega(t, V(t, x)) \\ V'(t, x) \leq \omega(t, V(t, x)), \end{cases} \tag{7}$$

sont remplies, alors la conclusion du théorème 1 reste valable.

En effet, pour une solution $x(t)$ du système (S), avec $\| x(t_0) \| < \delta$ on a les inégalités,

$$\| x(t) - x(a) \| \leq \int_a^t \| f(s, x(s)) \|\, ds \leq \int_a^t \omega(s, V(s, x(s)))\, ds \leq$$

$$\leq \int_a^t \omega(s, r(s))\, ds \leq r(t) - r(a),$$

et la démonstration continue dans la même manière que dans le théorème 1.

3. Comme une application des théorèmes démontrés, nous allons donner le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Admettons les hypothèses suivantes:*

1) *la fonction* $\omega(t, r)$ *est une fonction prèsque–périodique de la variable* t, *uniformément par rapport à* r, *et satisfait à l'hypothèse* 4) *du théorème 1*;

2) *l'équation* (E) *admet une solution bornée sur le demi–axe* $t \geq 0$;

3) *a lieu l'inégalité*

$$\| f(t, x) \| \leq \omega(t, \| x \|). \tag{8}$$

Alors, quel que soit $t_0 \geq 0$, *il existe un nombre positif* $\delta = \delta(t_0)$ *tel que toute solution* $x(t)$ *du système* (S), *avec* $\|x(t_0)\| \leq \delta$ *soit prèsque-périodique sur le demi-axe* $t \geq t_0$.

En effet, la condition (8) représente la condition (7) dans le cas particulier où $V(t, x) = \|x\|$. D'autre part, d'après le résultat de Z. Opial [7], la solution bornée de l'équation (E) est en même temps prèsque-périodique. Donc le théorème 2 est applicable, ce qui démontre le corollaire.

OUVRAGES CITÉES.

[1] R. CONTI, *Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*, « Boll. U.M.I. », *3*, 11 (1956).

[2] C. CORDUNEANU, *Sur l'application des inégalités différentielles dans la théorie de la stabilité* (en russe), « An. St. Univ. A. I. Cuza », Iași 1960.

[3] P. TALPALARU, *Solutions bornées des systèmes différentiels*, « An. Stint. Univ. A. I. Cuza », Iași, tom. XI_A, fasc. 2 (1965).

[4] C. AVRAMESCU, *Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non linéaires*, « Ann. Mat. pura ed appl. », (IV), vol. LXXXI (1969).

[5] G. SANSONE et R. CONTI, *Non-linear differential equations*, Pergamon Press, Oxford 1964.

[6] T. YOSHIZAWA, *Stability theory by Liapunov's second method*, The Math. Society of Japan, Tokyo 1966.

[7] Z. OPIAL, *Sur les solutions prèsque-périodiques des équations différentielles du premier et du second ordre*, « Ann. Pol. Mat. », VII (1959).