Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Dantoni

Su certe famiglie di relazioni n—arie invarianti di un'algebra

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.6, p. 456–464.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_6_456_0>

Algebra. — *Su certe famiglie di relazioni n–arie invarianti di un'algebra.* Nota di GIOVANNI DANTONI, presentata (*) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Two theorems are proved. The first theorem is a necessary and sufficient condition in order that a family of n–ary relations on a set M be the family of the n–ary invariant relations of some algebra of base set M. The second theorem is a sufficient condition in order that a family of n–ary invariant relations of an algebra be a modular lattice.

In questo lavoro dimostriamo due teoremi sulle relazioni n–arie invarianti di un'algebra.

Il primo teorema è enunciato nel n. 1 ed è dimostrato nei nn. 2, 3; in esso si dà una condizione necessaria e sufficiente affinché una famiglia di relazioni n–arie definite su un insieme M sia la famiglia di tutte e sole le relazioni n–arie invarianti di una qualche algebra avente M come sostegno.

Il secondo teorema è enunciato e dimostrato nel n. 5; in esso si dà una condizione sufficiente affinché una famiglia di relazioni n–arie invarianti di un'algebra sia un reticolo modulare.

1. Sia M un insieme non vuoto, sia R una relazione n–aria ($n \geq 1$) non vuota definita su M, sia ω una operazione algebrica m–aria ($m \geq 0$) definita pure su M. Chiameremo *prodotto di* ω *per* R, e lo indicheremo con ωR, la relazione n–aria definita nel seguente modo:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \omega \mathrm{R}$$

allora e solo quando esistono m elementi di R, distinti o no,

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathrm{R} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

tali che sia

$$a_j = a_{1j}\, a_{2j} \cdots a_{mj}\, \omega \qquad \text{per} \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Per $m = 0$, detto a l'elemento che corrisponde all'operazione nullaria ω ($\omega = a$), poniamo

$$\omega \mathrm{R} = \{(a, a, \cdots, a)\}.$$

Definiamo il prodotto ωR anche nel caso di R vuota, ponendo

$$\omega\varnothing = \varnothing \qquad \text{se è} \quad m \geq 1$$

$$\omega\varnothing = \{(a, a, \cdots, a)\} \qquad \text{se è} \quad m = 0 \quad \text{ed} \quad \omega = a.$$

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1969.

Osserviamo che se S è un'altra relazione n–aria definita su M, allora

$$\text{da } R \subseteq S \qquad \text{segue} \quad \omega R \subseteq \omega S .$$

Diremo che *la relazione* R *è invariante rispetto alla operazione* ω quando si ha

$$\omega R \subseteq R .$$

Sia $A = (M , \Omega)$ un'algebra avente M come sostegno ed Ω come sistema di operazioni. Diremo che una relazione n–aria R definita su M è una *relazione n–aria invariante dell'algebra* $A = (M , \Omega)$ (1) quando R è invariante rispetto ad ogni operazione del sistema Ω, cioè quando si ha

$$\omega R \subseteq R \qquad \text{per ogni} \quad \omega \in \Omega.$$

Premesso quanto sopra, ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema.

Sia M *un insieme non vuoto; sia n un intero positivo; sia* $\mathfrak{R}^{(n)}$ *una famiglia di sottoinsiemi di* M^n *contenente* M^n *come elemento* ($M^n \in \mathfrak{R}^{(n)}$). *Per ogni,* $X \subseteq M^n$ *indichiamo con* R (X) *l'intersezione di tutti gli elementi della famiglia* $\mathfrak{R}^{(n)}$ *che contengono* X *come sottoinsieme.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathfrak{R}^{(n)}$ *sia la famiglia di tutte (e sole) le relazioni n–arie invarianti di una qualche algebra avente* M *come sostegno, è che*

1) $\mathfrak{R}^{(n)}$ *sia un sistema di chiusura algebrico su* M^n.

2) *Per ogni sottoinsieme finito* $X_f \subseteq M^n$ *e per ogni* $y \in R(X_f)$ *esista una operazione algebrica* ω *definita su* M *tale che*

$$y \in \omega X_f$$
$$\omega R \subseteq R \qquad \textit{per ogni} \quad R \in \mathfrak{R}^{(n)}.$$

2. *Dimostriamo che le condizioni* 1) *e* 2) *sono necessarie.* Sia $A = (M , \Omega)$ un'algebra avente M come sostegno ed Ω come sistema di operazioni, e sia $\mathfrak{R}^{(n)}$ la famiglia di tutte e sole le relazioni n–arie invarianti dell'algebra $A = (M , \Omega)$.

a) $\mathfrak{R}^{(n)}$ *è un sistema di chiusura su* M^n. Infatti, dalla definizione di relazione n–aria invariante di A segue subito che è $M^n \in \mathfrak{R}^{(n)}$ e che $\mathfrak{R}^{(n)}$ è chiusa rispetto all'intersezione.

b) Per ogni operazione nullaria $\omega = a$ del sistema Ω consideriamo la n–upla $(a , a , \cdots , a)$ e indichiamo con Z l'insieme delle n–uple così ottenute. Indichiamo inoltre con Ω_1 l'insieme delle operazioni di Ω che hanno arità ≥ 1.

Per ogni $X \subseteq M^n$ consideriamo la relazione n–aria H (X) definita nel seguente modo:

$$H(X) = \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k \quad , \qquad H_0 = X \cup Z \quad , \qquad H_{k+1} = H_k \cup [\bigcup_{\omega \in \Omega_1} \omega H_k] .$$

(1) Per questa definizione e per i suoi vari aspetti vedasi Dantoni [3] e particolarmente le pp. 199–200.

c) *Proviamo ora che è*

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{H}(\mathrm{X}) = \mathrm{R}(\mathrm{X})$$

proviamo cioè che H (X) è l'intersezione di tutte le relazioni n–arie invarianti dell'algebra $\mathrm{A} = (\mathrm{M}, \Omega)$ che contengono X come sottoinsieme.

Proviamo anzitutto che H (X) è una relazione invariante di A, cioè che

$$\text{(2)} \qquad \omega\mathrm{H}(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{X}) \qquad \text{per ogni} \quad \omega \in \Omega.$$

Infatti, se H (X) è vuota allora Z è vuoto, quindi in Ω non ci sono operazioni nullarie, quindi si ha $\omega\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \varnothing \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{X})$ per ogni $\omega \in \Omega$, e quindi la (2) è vera.

Sia ora H (X) non vuota, sia ω un'operazione m–aria di Ω, e sia

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \omega\mathrm{H}(\mathrm{X}).$$

Se è $m = 0$ (ed $\omega = a$) allora si ha $\omega\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \{(a, a, \cdots, a)\} \subseteq \mathrm{Z} \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{X})$, e quindi la (2) è vera.

Sia $m \geq 1$. Per la definizione di prodotto $\omega\mathrm{H}(\mathrm{X})$ esistono m elementi

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathrm{H}(\mathrm{X}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

tali che

$$\text{(3)} \qquad a_j = a_{1j}\, a_{2j} \cdots a_{mj}\, \omega \qquad \text{per} \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

E poiché è $\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{H}_k$ con $\mathrm{H}_0 \subseteq \mathrm{H}_1 \subseteq \mathrm{H}_2 \subseteq \cdots$, si ha che esiste un intero k tale che per $i = 1, 2, \cdots, m$ è

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathrm{H}_k$$

e quindi per le (3) risulta

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \omega\, \mathrm{H}_k.$$

Ma per la definizione di H_{k+1} si ha $\omega\mathrm{H}_k \subseteq \mathrm{H}_{k+1}$ e quindi risulta

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \omega\mathrm{H}_k \subseteq \mathrm{H}_{k+1} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{H}_k = \mathrm{H}(\mathrm{X})$$

e questa prova che è $\omega\mathrm{H}(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{X})$. Con ciò la (2) risulta provata in tutti i casi.

Poiché H (X) è una relazione n–aria invariante dell'algebra A e contiene X come sottoinsieme, per provare la (1) basterà provare che se H′ è una qualunque relazione n–aria invariante di A che contiene X come sottoinsieme, allora si ha $\mathrm{H}(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{H}'$.

Infatti, da $\omega\mathrm{H}' \subseteq \mathrm{H}'$ per ogni $\omega \in \Omega$ segue $\mathrm{Z} \subseteq \mathrm{H}'$ e quindi, essendo anche $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{H}'$, si ha $\mathrm{H}_0 = \mathrm{X} \cup \mathrm{Z} \subseteq \mathrm{H}'$. Inoltre, supposto $\mathrm{H}_k \subseteq \mathrm{H}'$ si ha $\omega\mathrm{H}_k \subseteq \omega\mathrm{H}' \subseteq \mathrm{H}'$ per ogni $\omega \in \Omega$, e quindi è anche $\mathrm{H}_{k+1} \subseteq \mathrm{H}'$. Da ciò segue che è $\mathrm{H}_k \subseteq \mathrm{H}'$ per $k = 0, 1, 2, \cdots$ e quindi $\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{H}_k \subseteq \mathrm{H}'$.

d) *Proviamo ora che il sistema di chiusura* $\mathfrak{R}^{(n)}$ *è algebrico.* Dobbiamo dimostrare che per ogni $X \subseteq M^n$ e per ogni $y \in R(X)$ esiste un sottoinsieme finito X_f di X tale che si ha $y \in R(X_f)$.

La proprietà è vera per ogni $y \in H_0 = X \cup Z$ perché se è $y \in X$ basta porre $X_f = \{y\}$, e se è $y \in Z$ allora in Ω c'è una operazione nullaria $\omega = a$ tale che $y = (a, a, \cdots, a)$ e quindi, detto X_f un qualunque sottoinsieme finito di X si ha $y = (a, a, \cdots, a) \in \omega X_f \subseteq R(X_f)$.

Supponiamo ora che la proprietà sia vera per ogni elemento di H_k e proviamo che è vera anche per ogni elemento di H_{k+1}. Infatti, da $y \in H_{k+1}$ segue che o è $y \in H_k$ ed in questo caso la proprietà è vera per ipotesi, oppure è $y \in \omega H_k$ per qualche $\omega \in \Omega_1$. In questo caso, detta m la arità di ω, si ha $m \geq 1$ e da $y \in \omega H_k$ segue che esistono m elementi di H_k

$$z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{in}) \in H_k \qquad (i, 1, 2, \cdots, m)$$

tali che posto

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

si ha

$$y_j = z_{1j} z_{2j} \cdots z_{mj}\, \omega \qquad \text{per } j = 1, 2, \cdots, n$$

e quindi risulta

$$y \in \omega\{z_1, z_2, \cdots, z_m\} \subseteq R(\{z_1, z_2, \cdots, z_m\}). \tag{4}$$

E poiché la proprietà è vera per gli elementi di H_k si ha che in corrispondenza di ciascuno degli elementi z_i esiste un sottoinsieme finito $X_f^{(i)}$ di X tale che si ha

$$z_i \in R(X_f^{(i)}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Poniamo

$$X_f = X_f^{(1)} \cup X_f^{(2)} \cup \cdots \cup X_f^{(m)}.$$

Da $X_f^{(i)} \subseteq X_f$ segue $R(X_f^{(i)}) \subseteq R(X_f)$ e quindi si ha $z_i \in R(X_f^{(i)}) \subseteq R(X_f)$, e quindi $\{z_1, z_2, \cdots, z_m\} \subseteq R(X_f)$ da cui segue $R(\{z_1, z_2, \cdots, z_m\}) \subseteq R(X_f)$ e quindi per la (4) si ha $y \in R(X_f)$ e questa prova che la proprietà è vera per ogni $y \in H_{k+1}$. Con ciò risulta dimostrato che la proprietà è vera per ogni $y \in R(X)$.

e) *Proviamo infine che per ogni* $X \subseteq M^n$ *e per ogni* $y \in R(X)$ *esiste una operazione algebrica* ω *definita su* M *tale che*

$$y \in \omega X \qquad \textit{ed} \quad \omega R \subseteq R \qquad \textit{per ogni} \quad R \in \mathfrak{R}^{(n)}.$$

La proprietà è vera per ogni $y \in H_0 = X \cup Z$ perché se è $y \in X$ basta considerare come ω l'operazione unaria identica, e se è $y \in Z$ allora in Ω c'è una operazione nullaria $\omega = a$ tale che $y = (a, a, \cdots, a)$ e quindi basta considerare come ω l'operazione $\omega = a$.

Supponiamo ora che la proprietà sia vera per ogni elemento di H_k e proviamo che è vera anche per ogni elemento di H_{k+1}. Infatti, da $y \in H_{k+1}$

segue che o è $y \in H_k$ e in questo caso la proprietà è vera per ipotesi, oppure è $y \in \omega' H_k$ per qualche $\omega' \in \Omega_1$. Esaminiamo questo secondo caso.

Detta m la arità di ω', si ha $m \geq 1$ e da $y \in \omega' H_k$ segue che esistono m elementi di H_k

$$z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{in}) \in H_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

tali che posto

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

si ha

$$y_j = z_{1j} z_{2j} \cdots z_{mj} \omega' \qquad \text{per } j = 1, 2, \cdots, n. \tag{5}$$

Poiché la proprietà è vera per gli elementi di H_k, in corrispondenza di ciascun elemento z_i esiste una operazione ω_i definita su M tale che

$$z_i \in \omega_i X \qquad \text{ed} \quad \omega_i R \subseteq R \qquad \text{per ogni} \quad R \in \mathfrak{R}^{(n)}.$$

Detta n_i la arità della operazione ω_i, dalla $z_i \in \omega_i X$ segue che esistono n_i elementi di X

$$x_r^{(i)} = (x_{r1}^{(i)}, x_{r2}^{(i)}, \cdots, x_{rn}^{(i)}) \in X \qquad (r = 1, 2, \cdots, n_i) \tag{6}$$

tali che

$$z_{ij} = x_{1j}^{(i)} x_{2j}^{(i)} \cdots x_{n_i j}^{(i)} \omega_i. \tag{7}$$

Dalle (5) e (7) segue

$$y_j = x_{1j}^{(1)} x_{2j}^{(1)} \cdots x_{n_1 j}^{(1)} \omega_1 x_{1j}^{(2)} x_{2j}^{(2)} \cdots x_{n_2 j}^{(2)} \omega_2 \cdots x_{1j}^{(m)} x_{2j}^{(m)} \cdots x_{n_m j}^{(m)} \omega_m \omega'. \tag{8}$$

Poniamo ora $t = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ e consideriamo l'operazione t–aria ω definita su M da

$$x_1 x_2 \cdots x_t \omega = x_1 x_2 \cdots x_{n_1} \omega_1 x_{n_1+1} x_{n_2+2} \cdots x_{n_1+n_2} \omega_2 \cdots x_{t-n_m+1} \cdots x_t \omega_m \omega'. \tag{9}$$

Si ha $y \in \omega X$ per le (6) e le (8). Proviamo che è $\omega R \subseteq R$ per ogni $R \in \mathfrak{R}^{(n)}$.

Infatti, sia $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \omega R$. Da questa segue che esistono t elementi di R

$$b_r^{(i)} = (b_{r1}^{(i)}, b_{r2}^{(i)}, \cdots, b_{rn}^{(i)}) \in R \qquad (r = 1, 2, \cdots, n_i; i = 1, 2, \cdots, m) \tag{10}$$

tali che si ha

$$a_j = b_{1j}^{(1)} b_{2j}^{(1)} \cdots b_{n_1 j}^{(1)} \omega_1 b_{1j}^{(2)} b_{2j}^{(2)} \cdots b_{n_2 j}^{(2)} \omega_2 \cdots b_{1j}^{(m)} b_{2j}^{(m)} \cdots b_{n_m j}^{(m)} \omega_m \omega' \qquad (j = 1, 2, \cdots, n). \tag{11}$$

Dalle (10) e dalle $\omega_i R \subseteq R$ segue

$$(b_{11}^{(i)} b_{21}^{(i)} \cdots b_{n_i 1}^{(i)} \omega_i, b_{12}^{(i)} b_{22}^{(i)} \cdots b_{n_i 2}^{(i)} \omega_i, \cdots, b_{1n}^{(i)} b_{2n}^{(i)} \cdots b_{n_i n}^{(i)} \omega_i) \in R.$$

Da queste e dalle (11), tenendo presente che è $\omega' R \subseteq R$ perché $\omega' \in \Omega_1$, segue $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in R$ e quindi è $\omega R \subseteq R$ per ogni $R \in \mathfrak{R}^{(n)}$.

Con ciò risulta dimostrato che le condizioni 1) e 2) del teorema enunciato alla fine del n. 1 sono necessarie.

3. *Dimostriamo ora che le suddette condizioni* 1) *e* 2) *sono sufficienti.* Sia M un insieme non vuoto; sia n un intero positivo; sia $\mathfrak{R}^{(n)}$ un sistema di chiusura algebrico su M^n. Per ogni $X \subseteq M^n$ indichiamo con $R(X)$ l'intersezione di tutti gli insiemi del sistema $\mathfrak{R}^{(n)}$ che contengono X come sottoinsieme e supponiamo che per ogni sottoinsieme finito $X_f \subseteq M^n$ e per ogni $y \in R(X_f)$ esista una operazione algebrica ω definita su M tale che

$$y \in \omega X_f \qquad \text{ed} \quad \omega R \subseteq R \qquad \text{per ogni} \quad R \in \mathfrak{R}^{(n)}.$$

Indichiamo con Ω l'insieme di tutte le operazioni algebriche ω definite su M che soddisfano alla condizione

$$\omega R \subseteq R \qquad \text{per ogni} \quad R \in \mathfrak{R}^{(n)}.$$

L'insieme Ω non è vuoto perché contiene tutte le operazioni unitarie. Consideriamo l'algebra $A = (M, \Omega)$ che ha M come sostegno ed Ω come sistema di operazioni. Indichiamo con $\overline{\mathfrak{R}}^{(n)}$ l'insieme di tutte le relazioni n-arie invarianti dell'algebra A e osserviamo che è

$$\mathfrak{R}^{(n)} \subseteq \overline{\mathfrak{R}}^{(n)}. \tag{12}$$

Per ogni $X \subseteq M^n$ indichiamo con $\overline{R}(X)$ l'intersezione di tutti gli insiemi della famiglia $\overline{\mathfrak{R}}^{(n)}$ che contengono X come sottoinsieme. Dalla (12) segue

$$\overline{R}(X) \subseteq R(X) \qquad \text{per ogni} \quad X \subseteq M^n. \tag{13}$$

Sia ora X_f un sottoinsieme finito di M^n e sia y un elemento di $R(X_f)$. Per ipotesi esiste una operazione algebrica ω definita su M tale che

$$y \in \omega X_f \qquad \text{ed} \quad \omega R \subseteq R \qquad \text{per ogni} \quad R \in \mathfrak{R}^{(n)}.$$

Dall'ultima segue che è $\omega \in \Omega$ e quindi (n. 2 c, b)

$$\omega X_f \subseteq \overline{R}(X_f)$$

e quindi si ha $y \in \omega X_f \subseteq \overline{R}(X_f)$; cioè da $y \in R(X_f)$ segue $y \in \overline{R}(X_f)$ e quindi si ha $R(X_f) \subseteq \overline{R}(X_f)$, da cui per la (13) segue

$$R(X_f) = \overline{R}(X_f). \tag{14}$$

Sia infine X un qualunque sottoinsieme di M^n. Poiché $R(X)$ ed $\overline{R}(X)$ sono entrambi operatori di chiusura algebrici, il primo per ipotesi e il secondo per il n. 2, si ha

$$R(X) = \cup R(X_f) \quad , \quad \overline{R}(X) = \cup \overline{R}(X_f)$$

dove l'unione si intende estesa a tutti i sottoinsiemi finiti X_f di X. Da queste e dalla (14) segue

$$R(X) = \bar{R}(X)$$

quindi è $\mathfrak{R}^{(n)} = \overline{\mathfrak{R}}^{(n)}$, cioè $\mathfrak{R}^{(n)}$ è la famiglia di tutte le relazioni n–arie invarianti dell'algebra $A = (M, \Omega)$.

4. a) *Per* $n = 1$, *nel teorema del n.* 1 *la condizione* 2) *è superflua* perché una operazione come la ω esiste sempre.

Infatti, sia X_f un sottoinsieme finito di M e sia $y \in R(X_f)$. Indichiamo con $x_1, x_2, \cdots, x_m$ gli elementi di X_f e consideriamo l'operazione n–aria ω definita su M nel seguente modo

$$x_1 x_2 \cdots x_m \omega = y$$

$$a_1 a_2 \cdots a_m \omega = a_1 \quad \text{per ogni} \quad (a_1, a_2, \cdots, a_m) \neq (x_1, x_2, \cdots, x_m).$$

Si ha subito che la ω soddisfa alla condizione 2), cioè si ha $y \in \omega X_f$ ed $\omega R \subseteq R$ per ogni $R \in \mathfrak{R}^{(1)}$.

Poiché le relazioni unarie invarianti di un'algebra sono le sue sottoalgebre, da quanto sopra segue il noto teorema:

Affinché un sistema $\mathfrak{R}$ di sottoinsiemi di un insieme M sia la famiglia delle sottoalgebre di una qualche algebra occorre e basta che $\mathfrak{R}$ sia un sistema di chiusura algebrico (2).

b) *Per* $n \geq 2$ *invece la condizione* 2) *non è superflua*. Per esempio, per $n = 2$, il sistema di tutte le relazioni di equivalenza definite su M è un sistema di chiusura algebrico su M^2, ma non esiste un'algebra $A = (M, \Omega)$ avente come relazioni binarie invarianti tutte e sole le relazioni di equivalenza definite su M. Infatti, se una tale algebra $A = (M, \Omega)$ esistesse, allora dette E_1 ed E_2 due qualunque relazioni di equivalenza definite su M, esse sarebbero relazioni binarie invarianti di A, quindi il prodotto $E_1 E_2$ sarebbe una relazione binaria invariante di A, quindi, per l'ipotesi fatta, detto prodotto $E_1 E_2$ sarebbe una relazione di equivalenza e quindi risulterebbe $E_1 E_2 = E_2 E_1$; cioè due qualunque relazioni di equivalenza definite su M risulterebbero permutabili, e ciò non è vero.

5. Dimostriamo ora una condizione sufficiente affinché una famiglia di relazioni n–arie invarianti di un'algebra sia un reticolo modulare.

Sia (M, Ω) *un'algebra avente* M *come insieme sostegno ed* Ω *come sistema di operazioni. Sia n un intero positivo e sia* $\mathfrak{F}$ *una famiglia di relazioni n–arie invarianti dell'algebra* (M, Ω) *contenente* M^n *come elemento* ($M^n \in \mathfrak{F}$). *Per ogni*

(2) Birkoff and Frink [1]; Schmidt [6]; Cohn [2] p. 81; Grätzer [4] pp. 47–48.

$X \subseteq M^n$ *indichiamo con* $F(X)$ *l'intersezione di tutti gli insiemi di* $\mathfrak{F}$ *che contengono* X *come sottoinsieme e supponiamo che*:

1) $\mathfrak{F}$ *sia un sistema di chiusura su* M^n.

2) *Per ogni* $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ *e* $c \in F(A \cup B)$ *esistano* $a \in A$ *e* $b \in B$ *tali che sia*

$$c \in F(\{a, b\}) \quad , \quad a \in F(\{b, c\}) \quad , \quad b \in F(\{c, a\}).$$

In queste ipotesi $\mathfrak{F}$ *è un reticolo modulare rispetto all'intersezione* $\wedge$ *e all'unione* $\vee$ *così definite*:

$$A \wedge B = A \cap B \quad , \quad A \vee B = F(A \cup B). \tag{15}$$

Infatti, poiché F è un sistema di chiusura esso è un reticolo rispetto all'intersezione $\wedge$ e all'unione $\vee$ definite dalle (15). Dimostriamo ora che detto reticolo è modulare.

Supponiamo che in $\mathfrak{F}$ esistano tre elementi A, B, C tali che sia

$$A \subseteq C \quad , \quad F(C \cup B) = F(A \cup B) \quad , \quad C \cap B = A \cap B$$

e dimostriamo che da queste segue $A = C$. Infatti, per ogni $c \in C$ si ha

$$c \in C = F(C) \subseteq F(C \cup B) = F(A \cup B).$$

Da $c \in F(A \cup B)$ per la 2) segue che esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che si ha

$$c \in F(\{a, b\}) \quad , \quad a \in F(\{b, c\}) \quad , \quad b \in F(\{c, a\})$$

E poiché è $a \in A \subseteq C$, si ha $a \in C$ e quindi $F(\{c, a\}) \subseteq F(C) = C$, quindi è $b \in F(\{c, a\}) \subseteq C$, quindi è $b \in C$, quindi è $b \in B \cap C = A \cap B$, quindi è $b \in A$, quindi si ha

$$c \in F(\{a, b\}) \subseteq F(A) = A;$$

pertanto da $c \in C$ segue $c \in A$, cioè si ha $C \subseteq A$, da cui per la $A \subseteq C$ segue $A = C$.

Dalla proprietà dimostrata, tenendo presente le (15) segue (3) che il reticolo $\mathfrak{F}$ è modulare.

Osservazione. – Se $\mathfrak{F}$ è la famiglia di tutte le relazioni n-arie invarianti dell'algebra (M, Ω) allora la condizione 1) è certamente soddisfatta; inoltre in questo caso, per ogni $X \subseteq M^n$ la relazione n-aria $F(X)$ è la relazione $H(X)$ definita nel n. 2 b) e che possiamo chiamare la relazione n-aria invariante dell'algebra (M, Ω), *generata* da X.

In particolare per $n = 1$ si ha:

Affinché il reticolo delle sottoalgebre di un'algebra (M, Ω) *sia modulare è sufficiente che sia soddisfatta la seguente condizione*:

Per ogni coppia A *e* B *di sottoalgebre di* (M, Ω) *e per ogni elemento c della sottoalgebra generata da* A *e* B, *esistono* $a \in A$ *e* $b \in B$ *tali che la sottoalgebra generata da due qualunque dei tre elementi* a, b, c *contiene il terzo.*

(3) Kurosh [5] p. 164.

6. *Consideriamo infine due casi particolari* nei quali le condizioni 1) e 2) del teorema del n. 5 sono verificate.

a) $\mathfrak{F}$ *sia una famiglia di sottogruppi di un gruppo* G. Inoltre supponiamo che:

1′) $\mathfrak{F}$ sia un sistema di chiusura su G.

2′) Da $A \in \mathfrak{F}$ e $B \in \mathfrak{F}$ segua $AB = BA \in \mathfrak{F}$.

In queste ipotesi si ha $F(A \cup B) = AB$ e quindi per ogni $c \in F(A \cup B) = AB$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che si ha

$$c = ab \in F(\{a, b\}) \quad , \quad a = cb^{-1} \in F(\{b, c\}) \quad , \quad b = a^{-1}c \in F(\{c, a\})$$

e quindi sono verificate le condizioni 1) e 2) del teorema del n. 5.

Notiamo che le condizioni 1′) e 2′) sono verificate in particolare quando $\mathfrak{F}$ è la famiglia di tutti i sottogruppi normali di G, e sono verificate anche quando $\mathfrak{F}$ è la famiglia di tutti i sottogruppi di un gruppo quasi-hamiltoniano.

b) $\mathfrak{F}$ *sia una famiglia di congruenze di un'algebra* (M, Ω). Inoltre supponiamo che:

1″) $\mathfrak{F}$ sia un sistema di chiusura su M^2,

2″) Da $A \in \mathfrak{F}$ e $B \in \mathfrak{F}$ segua $AB = BA \in \mathfrak{F}$.

In queste ipotesi si ha $F(A \cup B) = AB$ e quindi per ogni $(a, b) \in F(A \cup B) = AB$ esiste $x \in M$ tale che si ha $(a, x) \in A$ e $(x, b) \in B$. E poiché la congruenza minima della famiglia $\mathfrak{F}$ che contiene due delle tre coppie (a, b), (a, x) e (x, b) contiene anche la terza, si ha

$$(a, b) \in F(\{(a, x), (x, b)\}) \quad , \quad (a, x) \in F(\{(a, b), (x, b)\}) \quad , \quad (x, b) \in F(\{(a, x), (a, b)\})$$

e quindi sono verificate le condizioni 1) e 2) del teorema del n. 5.

Notiamo che le condizioni 1″) e 2″) sono verificate in particolare quando la famiglia $\mathfrak{F}$ è l'insieme di tutte le congruenze di un'algebra a congruenze due a due permutabili. Pertanto da quanto sopra segue il noto teorema:

Se le congruenze di un'algebra sono due a due permutabili, allora il reticolo delle congruenze di detta algebra è modulare (4).

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. BIRKHOFF e O. FRINK, *Representations of lattices by sets*, «Trans. Am. Math. Soc.», *64* (1948).

[2] P. M. COHN, *Universal algebra*, Harper and Row, New York 1965.

[3] G. DANTONI, *Relazioni invarianti di un'algebra universale ed algebre col sistema di operazioni completo rispetto ad una famiglia di relazioni invarianti*, «Le Matematiche», XXIV (1969).

[4] G. GRÄTZER, *Universal algebra*, D. Van Nostrand Co., Princeton 1968.

[5] A. G. KUROSH, *Lectures on general algebra*, New York 1963.

[6] J. SCHMIDT, *Über die Rolle der transfiniten Schlussweisen in einer allgemeinen Idealtheorie*, «Math. Nachr.», 7 (1952).

(4) Cohn [2] p. 90.