Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ermanno Lanconelli

Sui moltiplicatori in L_p ed in B_p^0 e applicazioni al problema di Cauchy

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.6, p. 441–445.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_6_441_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Matematica. — *Sui moltiplicatori in* L_p *ed in* B_p^0 *e applicazioni al problema di Cauchy.* Nota di ERMANNO LANCONELLI, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — Some theorems on multipliers of Fourier transform are given. Then evaluations, in L_p spaces, of the solutions of Cauchy problems for some classes of operators are obtained.

Lo studio del problema di Cauchy in L_p mediante l'uso della trasformata di Fourier, pone la questione di studiare le funzioni del tipo $\exp(f)$ come moltiplicatori dell'integrale di Fourier (vedere, ad esempio, [1], [4], [6]). I risultati a tutt'oggi noti sui moltiplicatori non sembrano rispondere in maniera soddisfacente a tale esigenza, specialmente nel caso in cui i valori di f sono immaginari puri (vedere, ad esempio, [2], [3], [7], [8]).

Nella prima parte della presente Nota daremo, perciò, alcuni teoremi sui moltiplicatori della trasformata di Fourier del tipo $\exp(if)$, con f a valori reali. Nella seconda parte daremo, dapprima, una valutazione in L_2 della soluzione di certi problemi di Cauchy e mostreremo poi in quale forma tali valutazioni si estendono al caso $p \neq 2$, $1 < p < \infty$. Le dimostrazioni si troveranno in una Memoria in corso di stampa nei Rendiconti di Matematica.

Notazioni. – Indichiamo con S lo spazio delle funzioni di classe C^∞ su R a decrescenza rapida all'infinito e con S' lo spazio delle distribuzioni temperate. $\mathfrak{F}$ ed $\mathfrak{F}^{-1}$ indicano rispettivamente la trasformata di Fourier e la sua inversa. Con S^0 indichiamo l'insieme delle funzioni $\varphi \in S$ per le quali riesce $\mathfrak{F}(\varphi) \in C_0^\infty$. L_p è il sottospazio di S' delle funzioni di p-esima potenza sommabile se $1 \leq p < \infty$, essenzialmente limitate se $p = \infty$; $\|\cdot\|_p$ indica la norma in L_p. Posto $\Gamma_0 = \{\xi \in R \mid |\xi| \leq 1\}$, $\Gamma_K = \{\xi \in R \mid 2^{k-1} < |\xi| \leq 2^k\}$, $k = 1, 2, \cdots$, indichiamo con B_p^0 il sottospazio di S' ottenuto per chiusura di S rispetto alla norma

$$|||f|||_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \| \mathfrak{F}^{-1}(\chi_k \mathfrak{F}f) \|_p^p\right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty,$$

dove χ_k indica la funzione caratteristica di Γ_k.

Sia inoltre $\mathfrak{I}_\lambda(\xi) = (1 + \xi^2)^{-\lambda/2}$ e poniamo

$$L_p^\lambda = \{f \in S' / \|f\|_{p,\lambda} = \| \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{I}_{-\lambda} \mathfrak{F}f) \|_p < +\infty\}, \quad 1 < p < \infty, \lambda \in R;$$

definiamo in maniera analoga lo spazio B_p^λ e la norma $|||f|||_{p,\lambda}$.

Sia ora $\Phi \in S'$ e consideriamo l'applicazione $T_\Phi : S \to S'$ definita da

$$T_\Phi(\varphi) = \mathfrak{F}^{-1}(\Phi \mathfrak{F}\varphi).$$

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1969.

Diremo che Φ appartiene ad $M_p(\mathfrak{M}_p)$ se T_Φ si può prolungare in una trasformazione continua di L_p in sé (rispettivamente di B_p^0 in sè); indicheremo con $M_p(\Phi)(\mathfrak{M}_p(\Phi))$ la norma di tale operatore. Se T_Φ può essere prolungata in una trasformazione continua di B_p^λ in B_p^0, diremo allora che Φ appartiene ad $\mathfrak{M}_{p,\lambda}$ ed indicheremo con $\mathfrak{M}_{p,\lambda}(\Phi)$ la norma di T_Φ.

Infine, se $f \in L_2$ e μ è una funzione continua per la quale riesce $\mu \mathfrak{F} f \in L_2$, definiamo

$$\mathbf{D}_x^\mu f = \mathfrak{F}^{-1}(\mu \mathfrak{F} f).$$

1. Alcuni teoremi sui moltiplicatori.

Nel corso del presente paragrafo indicheremo con f una funzione di dominio R, a valori reali e di classe C^2; indicheremo coi simboli f' ed f'' rispettivamente le derivate prima e seconda di f.

Posto $\rho = |1/p - 1/2|$ sussiste il seguente

Teorema 1.1. – *Condizione necessaria affinché sia* $\exp(if) \in \mathfrak{M}_{p,\lambda}$ $(1 < p < \infty, p \neq 2)$ *è che esista una costante positiva* C, *indipendente da* k, *tale che* $\inf_{\Gamma_k} |\xi^2 f''(\xi)| \leq C\, 2^{k\lambda/\rho}$, *per ogni* $k = 1, 2, \cdots$.

La dimostrazione di questo teorema si può conseguire valutando dapprima la norma di $\mathfrak{F}^{-1}(\omega \exp(if))$ in L_∞, essendo ω una opportuna funzione di classe C_0^∞, ed utilizzando poi un procedimento del tipo di quello utilizzato da Hörmander per provare che $\exp(i\xi^2) \notin M_p$ ([3], lemma 1.3).

Poiché M_p è contenuto in $\mathfrak{M}_p$ ([5]), una conseguenza immediata del teorema 1 è il seguente

Corollario 1.1. – *Se* $\exp(if) \in M_p$ *allora* $\overline{\lim_{|\xi| \to \infty}} |\xi^2 f''(\xi)| < +\infty$.

Dal corollario 1.1 segue subito che $\exp(i\xi^2) \notin M_p$.

Diremo che f soddisfa la condizione (Γ) se:

$$(\Gamma) \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \left[\sup_{t,\tau \in \Gamma_k} |f''(t)/f''(\tau)| \right] < +\infty .$$

Abbiamo allora:

Teorema 2.1. – *Se f verifica la condizione* (Γ), $\exp(if) \in \mathfrak{M}_{p,\lambda}$ *se e solo se esiste una costante* C *per la quale riesce* $\inf_{\Gamma_k} |\xi^2 f''(\xi)| \leq C\, 2^{k\lambda/\rho}$, $k = 1, 2, \cdots$

La dimostrazione di questo teorema si può fondare sulla valutazione della norma in L_1 di $\mathfrak{F}^{-1}(\omega_k \exp(if))$, essendo ω_k una funzione di C_0^∞, uguale ad 1 su Γ_k. Utilizzando poi il fatto che $\omega_k \exp(if) \in M_2$, mediante il teorema di interpolazione di M. Riesz, si ottiene una valutazione della norma di $\chi_k \exp(if)$ in M_p e, quindi, di $\exp(if)$ in $\mathfrak{M}_{p,\lambda}$ $(\mathfrak{M}_{p,\lambda}(\Phi) = \sup_k (2^{-k} M_p(\chi_k \exp(if))$, [5]).

COROLLARIO 2.1. – *Se esistono finiti e diversi da zero i limiti* $\lim_{\xi\to\pm\infty} f''(\xi)\,\xi^{2-\alpha}$, *per un opportuno* $\alpha \in \mathrm{R}$, $\exp(if) \in \mathfrak{M}_{p,\lambda}$ *se e solo se* $\lambda \geq \max\{0, \alpha\,|\,1/p - 1/2\,|\}$.

Se r è un polinomio di primo grado a coefficienti reali, allora $\mathrm{M}_p(\exp(ir)) = 1$, pertanto se $f, g \in \mathrm{C}^2$ ed è $f'' = g''$, allora $\mathrm{M}_p(\exp(if)) = \mathrm{M}_p(\exp(ig))$; mediante questa osservazione, applicando il teorema di Miklin si dimostra il seguente

TEOREMA 3.1. – *Sia* f *una funzione verificante la condizione* (Γ); *affinché riesca* $\exp(if) \in \mathrm{M}_p$ $(1 < p < \infty\,,\, p \neq 2)$ *è necessario e sufficiente che sia* $\overline{\lim}\,|\,\xi^2 f''(\xi)\,| < +\infty$.

I seguenti teoremi forniscono una risposta al seguente quesito: se $\exp(ify) \in \mathfrak{M}_{p,\lambda}$ per ogni $y \in \mathrm{R}$, qual'è il comportamento asintotico (per $|\,y\,| \to \infty$) della norma di $\exp(ify)$ in $\mathfrak{M}_{p,\lambda}$. In [3] Hörmander ha provato che, se $f'' \not\equiv 0$, allora $\overline{\lim}_{|y|\to\infty} \mathrm{M}_p[\exp(ify)] = +\infty$. Più precisamente si ha:

TEOREMA 4.1. – *Se* $f'' \not\equiv 0$ *esiste una costante positiva* $\mathrm{C}_\lambda(f)$, *dipendente solo da* f *e* λ, *tale che* $\mathfrak{M}_{p,\lambda}(\exp(ify)) \geq \mathrm{C}_\lambda(f)\left(\sqrt{1+y^2}\right)^{|1/p-1/2|}$.

Diremo che a è uno zero di ordine finito per f'', se, per un opportuno numero reale α, esistono finiti e diversi da zero i limiti $\lim_{x\to a\pm} f''(x)\,|\,x-a\,|^{-\alpha}$.

TEOREMA 5.1. – *Se* f *verifica la condizione* (Γ), *se* f'' *ha al più un numero finito di zeri e tutti di ordine finito, se* $\exp(if) \in \mathfrak{M}_{p,\lambda}$, *allora* $\exp(ify) \in \mathfrak{M}_{p,\lambda}$ *per ogni* $y \in \mathrm{R}$ *e* $\mathfrak{M}_{p,\lambda}(e^{ify}) \leq \mathrm{C}_\lambda(f)\left(\sqrt{1+y^2}\right)^{|1/p-1/2|}$, *dove* $\mathrm{C}_\lambda(f)$ *dipende solo dalle variabili indicate.*

2. – OPERATORI CONSERVATIVI.

Consideriamo l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y) = \mathrm{D}_y^n - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_k(\mathrm{D}_x)\,\mathrm{D}_y^{n-k}\left(\mathrm{D}_x = \frac{\partial}{\partial x}\;,\; \mathrm{D}_y = \frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1.2}$$

dove $\mathrm{P}_k(\mathrm{D}_x)$ è un polinomio in D_x.

Chiamiamo radici caratteristiche di P le radici $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ dell'equazione

$$\mathrm{P}(-i\xi, \lambda) = 0. \tag{2.2}$$

Nel seguito supporremo sempre che il discriminante dell'equazione (2.2) sia non identicamente nullo. Indichiamo con V il determinante di Vandermonde di $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ e con $\mathrm{V}_{j,k}(y)$ il determinante ottenuto da V mediante sostituzione della riga $(\lambda_1^j, \cdots, \lambda_n^j)$ con $((\exp(\lambda_1 y))\,\lambda_1^k, \cdots, (\exp(\lambda_n y))\,\lambda_n^k)$.

Per ogni $\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1} \in \mathrm{S}^0$ il problema di Cauchy

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)\,u(x, y) = 0\,,\; y \in \mathrm{R}\,,$$

$$\mathrm{D}_y^j\,u(x, 0) = \varphi_j(x)\,,\; j = 0, 1, \cdots, n-1\,,$$

è risolto dalla funzione (di classe C^∞ su R^2)

$$u(\cdot, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{F}^{-1}((\mathcal{F}\varphi_j)\, V_{j,0}(y)/V) . \tag{3.2}$$

Introduciamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.2. – *Diremo che l'operatore* P *è conservativo se esistono delle funzioni continue* $\mu_0, \cdots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1} = 1$, *tali che*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \| \mathbf{D}_x^{\mu_j} D_y^j u(\cdot, y) \|_2 \leq C \sum_{j=0}^{n-1} \| \mathbf{D}_x^{\mu_j} \varphi_j \|_2 , \tag{4.2}$$

per ogni $y \in R$ *e per ogni* $\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1} \in S^0$.

Ad esempio, l'operatore delle onde $D_y^2 - D_x^2$ è conservativo; è ben noto infatti che

$$\| D_x u(\cdot, y) \|_2^2 + \| D_y u(\cdot, y) \|_2^2 = \| D_x \varphi_0 \|_2^2 + \| \varphi_1 \|_2^2 ;$$

quindi vale (4.2) con $\mu_0(\xi) = |\xi|$ e $\mu_1 = 1$.

TEOREMA 1.2. – *Se* $P(D_x, D_y)$ *è conservativo, le radici caratteristiche di* P *sono immaginarie pure; inoltre* $\sup_R |\lambda_r (\lambda_r - \lambda_l)^{-1}| < +\infty$, $r \neq l$.

La condizione necessaria ora enunciata affinché P sia conservativo, è anche sufficiente; infatti, posto

$$\mu_j = | S_{n-1-j}(\lambda^2) |^{1/2} \quad , \quad j = 0, 1, \cdots, n-1 , \tag{5.2}$$

dove $S_r(\lambda^2)$ indica la somma dei prodotti ad r ad r di $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$, si ha:

TEOREMA 2.2. – *Se* P *è un operatore differenziale del tipo* (1.2) *le cui radici caratteristiche sono immaginarie pure e tali che* $\sup_R |\lambda_r (\lambda_r - \lambda_l)^{-1}| < +\infty$, *allora P è conservativo e vale* (4.2) *con* $\mu_0, \cdots, \mu_{n-1}$ *fornite da* (5.2).

I teoremi seguenti forniscono condizioni necessarie e condizioni sufficienti su $\alpha \in R$ e $C(\alpha, y)$ affinché sia

$$\sum_{j=0}^{n-1} ||| \mathbf{D}_x^{\mu_j} D_y^j u(\cdot, y) |||_p \leq C(\alpha, y) \sum_{j=0}^{n-1} ||| \mathbf{D}_x^{\mu_j} \varphi_j |||_{p,\alpha} , \tag{6.2}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \| \mathbf{D}_x^{\mu_j} D_y^j u(\cdot, y) \|_p \leq C(\alpha, y) \sum_{j=0}^{n-1} \| \mathbf{D}_x^{\mu_j} \varphi_j \|_{p,\alpha} , \tag{7.2}$$

dove u è la funzione (3.2).

DEFINIZIONE 2.2. – *Sia* λ *una radice caratteristica di* P; *se* $\lambda'' \not\equiv 0$, *sia*

$$\lambda''(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{m} b_k \xi^{k/\nu - 2} \quad , \quad b_m \neq 0 \ (|\xi| > \delta) ,$$

il suo sviluppo in serie di Puiseux. Poniamo allora $\alpha(\lambda) = m/\nu$, $\theta(\lambda) = 1$; *se invece* $\lambda'' \equiv 0$, *poniamo* $\alpha(\lambda) = \theta(\lambda) = 0$. *Poniamo infine* $\alpha(P) = \max\{\alpha(\lambda_1), \cdots, \alpha(\lambda_n)\}$, $\theta(P) = \max\{\theta(\lambda_1), \cdots, \theta(\lambda_n)\}$.

Utilizzando i risultati enunciati nella prima parte, si dimostra il seguente

Teorema 3.2. – *Le condizioni i)* $\alpha \geq \alpha(P) \mid 1/p - 1/2 \mid$, *ii)* $C(\alpha, y) \geq C_\alpha (\sqrt{1+y^2})^{\theta(P) \mid 1/p - 1/2 \mid}$, *sono necessarie e sufficienti affinché valga* (6.2) *e necessarie affinché valga* (7.2). *Le condizioni iii)* $\alpha > \alpha(P) \mid 1/p - 1/2 \mid$ *ed ii) sono sufficienti affinché valga* (7.2).

Esempio. – L'operatore $P(D_x, D_y) = D_y^2 + (-1)^m D_x^{2m}$, $m > 1$, è conservativo in quanto le sue radici caratteristiche sono $\lambda_1 = i\xi^m$, $\lambda_2 = -i\xi^m$. In questo caso risulta allora $\mu_0(\xi) = \mid \xi \mid^m$, $\alpha(P) = m$, $\theta(P) = 1$. Se u è la funzione (3.2) relativa a P, utilizzando il teorema 3.2 si ottiene

$$\||| D_x^m u(\cdot, y) \|||_p + \||| D_y u(\cdot, y) \|||_p \leq C(\alpha, y) (\||| D_x^m \varphi_0 \|||_{p,\alpha} + \||| \varphi_1 \|||_{p,\alpha}),$$

se e solo se $\alpha \geq m \mid 1/p - 1/2 \mid$, $C(\alpha, y) \geq C_\alpha (\sqrt{1+y^2})^{\mid 1/p - 1/2 \mid}$.

Bibliografia.

[1] P. Brenner, «Math. Scand.», *19* (1966).
[2] I. I. Hirschman, «Duke Math. J.», *26* (1959); *28* (1961).
[3] L. Hormander, «Acta Math.», *104* (1960).
[4] E. Lanconelli, «Boll. U.M.I.», 4–5 (1968).
[5] E. Lanconelli, «Boll. U.M.I.», *6* (1968).
[6] E. Lanconelli, «Boll. U.M.I.», *6* (1968).
[7] P. I. Lizorkin, «Trudy Mat. Inst. Stek.», *89–2* (1967).
[8] S. G. Miklin, «Dokl. Akad. Nauk SSSR», *109* (1956).