Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mircea Craioveanu

Quelques résultats sur la géométrie différentielle globale des variétés hilbertiennes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.5, p. 253–263.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_5_253_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Geometria differenziale. — *Quelques résultats sur la géométrie différentielle globale des variétés hilbertiennes.* Nota di MIRCEA CRAIOVEANU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUNTO. — Il presente lavoro stabilisce i risultati qui enunciati in (A) ed in (B).

(A) – Se Y è una *varietà riemanniana* C^∞ il cui modello sia uno spazio di Hilbert separabile avente dimensione infinita, e che inoltre sia semplicemente connesso, completo a curvatura di sezione ovunque negativa o nulla, e se X è una sottovarietà chiusa *totalmente geodetica* di Y, si può precisare una modalità geometrica per ottenere i fibrati della *fibrazione normale* dell'applicazione d'inclusione i: $X \to Y$.

(B) – Se **K** è un *gruppo di Lie* compatto operante su Y, principalmente mediante isometrie, dove Y soddisfi alle condizioni specificate in (A), le trasformazioni di **K** ammettono un *punto fisso*.

1. PRÉLIMINAIRES.

Soit Y une C^∞–variété modelée sur un espace de Hilbert séparable **H**; nous notons τ_Y la projection du fibré tangent (TY, τ_Y, Y). Alors on peut considérer le fibré vectoriel $SL^2(TY, \mathbf{R}) \to Y$ [3] dont la fibre au-dessus de tout point $y \in Y$ est l'espace des formes bilinéaires symétriques continues sur l'espace tangent en y, $\tau_Y^{-1}(y) = T_y Y$. Une C^k–structure riemannienne g $(1 \leq k \leq \infty)$ sur (TY, τ_Y, Y) est une C^k–section du fibré $SL^2(TY, \mathbf{R}) \to Y$, c'est-à-dire $g \in C^k(SL^2(TY, \mathbf{R}))$, qui est positif défini en chaque point $y \in Y$ et qui, comme produit intérieur sur $T_y Y$, détermine sa structure d'espace de Hilbert. Alors on dit que Y est une C^k–variété riemannienne modelée sur l'espace de Hilbert séparable **H**. La valeur de g en $y \in Y$ est souvent écrite $g_y(u, v) = \langle u, v\rangle_y$ pour $u, v \in T_y Y$; on peut aussi noter $g_y(u, u)$ avec $\|u\|_y^2$.

Une connexion linéaire ou une dérivée covariante sur Y est une application

$$\nabla : C^\infty(TY) \times C^\infty(TY) \to C^\infty(TY)$$

(on note $\nabla(A, B) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \nabla_A B$) pour laquelle on a

$$\nabla_A(B_1 + B_2) = \nabla_A B_1 + \nabla_A B_2 , \tag{1}$$

$$\nabla_A(fB) = (Af) B + f \nabla_A B , \tag{2}$$

$$\nabla_{A_1 + A_2} B = \nabla_{A_1} B + \nabla_{A_2} B , \tag{3}$$

$$\nabla_{fA} B = f \nabla_A B , \tag{4}$$

où $f \in C^\infty(Y \times \mathbf{R})$. Alors le champ des vecteurs $\nabla_A B$ est appelé la dérivée covariante de B dans la direction A par rapport à ∇.

(*) Nella seduta del 15 novembre 1969.

Soit ∇ une connexion linéaire sur Y. Nous définissons le tenseur

$$T : C^\infty(TY) \times C^\infty(TY) \to C^\infty(TY)$$

par

(5) $$T(A, B) = \nabla_A B - \nabla_B A - [A, B]$$

et le tenseur

$$R : C^\infty(TY) \times C^\infty(TY) \times C^\infty(TY) \to C^\infty(TY)$$

par

(6) $$R(A, B)C = \nabla_A \nabla_B C - \nabla_B \nabla_A C - \nabla_{[A,B]} C.$$

T est appelé le tenseur de torsion et R le tenseur de courbure de ∇.

Un théorème fondamental de géométrie riemannienne est le suivant [1]:

Soit g une structure riemannienne sur Y. *Alors il existe une dérivée covariante unique* $\mathring{\nabla}$ *sur le fibré tangent de* Y *avec* $\mathring{\nabla}_A g = 0$ *et* $\mathring{T}(A, B) = 0$ *pour* $A, B \in C^\infty(TY)$. *La structure riemannienne* g *fournit une topologie d'espace métrique qui est équivalente à la topologie initiale de* Y.

On dit que la variété riemannienne Y est complète si l'espace métrique Y (au sens du théorème fondamental) est complet au sens des suites de Cauchy. On sait que toute C^∞–variété séparable modelée sur un espace de Hilbert séparable possède une structure de variété riemannienne complète.

Un champ de vecteurs $A \in C^\infty(TY)$ (conçu comme une section) induit une application $TA : TY \to TTY$, de telle manière qu'à $u \in T_y Y$ on peut attacher le vecteur $T_u A \in T_A(TY)$. On note avec K l'application de connexion de ∇:

$$K : TTY \to TY,$$

définie par

(7) $$KT_u A = \nabla_u A, \qquad \text{où} \quad A \in C^\infty(TY) \quad , \quad u \in TY.$$

Si $c \in \mathcal{C}^1(I, TY)$, on note

$$\frac{D}{dt} c = K \circ \dot{c}$$

la dérivée covariante du champ de vecteurs c au long de la courbe $\tau_Y \circ c$.

Soit Y une variété riemannienne et $y \in Y$. Étant donnés deux vecteurs $u, v \in T_y Y$ linéaires indépendants, nous définissons la courbure sectionnelle dans la direction plane $u \wedge v$ par

(8) $$\mathcal{K}(u \wedge v) = \langle \mathring{R}_y(v, u)\, u, v \rangle_y / |u \vee v|^2,$$

où avec $u \wedge v$ nous avons noté le produit extérieur des vecteurs u, v et avec $|u \vee v|$ l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs u, v. $\mathring{R}_y$ désigne ici la courbure (6) en y de la connexion linéaire donnée par le théorème fondamental de la géométrie riemannienne.

2. Démonstration de (A).

Soient X et Y des C^1–variétés modelées sur des espaces de Hilbert séparables, $f : X \to Y$ une C^1–immersion. On sait [3] que toute structure riemannienne g sur Y induit une structure riemannienne g' sur X par

$$g'(A, B) = g(Tf(A), Tf(B)) \qquad \text{pour} \quad A, B \in TX,$$

TX désignant le fibré tangent à X. Si f est une immersion propre (en particulier si f est un plongement fermé) et si (Y, g) est complète, (X, g') est complète [4].

D'autre part, f étant une immersion, on peut définir le fibré normal de f comme le fibré quotient $f^* TY/\mathrm{Im}(T^*f)$, où $T^*f : TX \to f^*TY$ signifie le morphisme canonique des espaces fibrés vectoriels, entre le fibré tangent à X et la préimage au-dessus de X du fibré tangent à Y, TY [3].

On suppose plus loin que f est un plongement fermé donné par l'application d'inclusion. On dit dans ce cas que X est une sous-variété fermée de Y et on écrit $X \subset Y$.

Soient donc X, Y des C^∞-variétés riemanniennes, $X \subset Y$ et on note avec d_X et d_Y les distances déduites de g' et respectivement g. Alors on a

$$d_Y(x_0, x_1) \leq d_X(x_0, x_1) \qquad \text{pour tout} \quad x_0, x_1 \in X. \tag{9}$$

Les géodésiques de X et respectivement Y seront appelées X-géodésiques et Y-géodésiques.

LEMME 2.1. *Soit γ une courbe de X qui est une Y-géodésique. Alors γ est une X-géodésique.*

Preuve. Choisissons deux points arbitraires x_0 et x_1 sur $\gamma \in \mathcal{C}^1(J, X)$ (J étant un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$), tel que $x_0 = \gamma(t_0)$ et $x_1 = \gamma(t_1)$, pour $t_0, t_1 \in J$. Supposons maintenant $t_0 < t_1$. Soit U_0 un voisinage convexe de x_0 dans Y [1]. Si t_1 est suffisamment proche de t_0, tel que $x_1 \in U_0$, alors le segment de l'Y-géodésique

$$\gamma : t \to \gamma(t) \qquad t \in [t_0, t_1], \quad \text{noté} \quad \gamma|_{t_0}^{t_1},$$

est compris dans U_0 et sa longueur, $L(\gamma|_{t_0}^{t_1})$, est égale avec la distance entre les points x_0 et x_1:

$$L(\gamma|_{t_0}^{t_1}) = d_Y(x_0, x_1). \tag{10}$$

Mais, d'autre part, on a évidemment

$$d_X(x_0, x_1) \leq L(\gamma|_{t_0}^{t_1}). \tag{11}$$

En utilisant (9), (10) et (11) il suit que

$$L(\gamma|_{t_0}^{t_1}) = d_X(x_0, x_1),$$

c'est-à-dire $\gamma|_{t_0}^{t_1}$ est un segment de X-géodésique. Comme les points x_0 et x_1 ont été arbitraires, il résulte que γ est une X-géodésique. C.q.f.d.

Soit $x \in X$. La sous-variété X s'appelle géodésique en x, si chaque Y-géodésique tangente à X en x est une courbe qui appartient à X. X s'appelle totalement géodésique si elle est géodésique en chacun de ses points.

LEMME 2.2. *Soit X géodésique en $x \in X$ $(X \subset Y)$. Si γ est une X-géodésique qui passe par x, γ est une Y-géodésique.*

Preuve. En effet, soit Γ la Y-géodésique maximale tangente à γ en x. Alors, d'après le lemme 2.1, Γ est une X-géodésique, c'est-à-dire $\Gamma \subset X$. Γ étant maximale, il résulte que $\gamma \subset \Gamma$. C.q.f.d.

THÉORÈME 2.1. *Si* Y *est une* C^r*–variété riemannienne* ($r \geq 3$), *connexe, complète et de courbure sectionnelle partout négative ou nulle, pour tout* $y \in Y$ *l'application* $\exp_y : T_y Y \to Y$ *est un revêtement surjectif.*

Preuve. On peut trouver la démonstration de ce théorème par exemple dans [4]. Puisqu'on utilisera quelques résultats qui paraissent au cours de la démonstration nous la donnerons plus loin. Grâce à la complétitude on peut définir $f = \exp_y$ sur $T_y Y$ tout entier. On sait [3] que f est une application de classe C^{r-2}. D'autre part on sait [4] que

$$T_u f(w) = \mathrm{Jac}\,(u\,, T\tau_Y(w)\,, K(w))\,, \qquad u \in T_y Y\;,\quad w \in T_u T_y Y,$$

l'application $\mathrm{Jac} : TY \times TY \times TY \to TY$ étant telle que $\mathrm{Jac}\,(u\,, v\,, z)$ soit la valeur en 1 de la solution α de l'équation

$$\frac{D^2 \alpha}{dt^2} + \overset{\circ}{R}(\alpha\,, \dot{c})\,\dot{c} = 0\,,$$

avec $f(tu) = c(t)$, $\alpha(0) = v$, $\dfrac{D}{dt}\alpha(0) = z$, pour $u\,, v\,, z \in TY$. (Nous avons gardé les notations du § 1).

Nous pouvons définir pour TY par rapport à $\overset{\circ}{\nabla}$ une structure riemannienne par

$$\bar{g}(E\,, F) = g(T\tau_Y(E)\,, T\tau_Y(F)) + g(K(E)\,, K(F))\,,$$

où $E\,, F \in C^\infty(TTY)$. Le plongement $i : T_y Y \subset TY$ induit de $\bar{g}$ une structure riemannienne $\bar{\bar{g}}$ sur $T_y Y$, nommément pour $u \in T_y Y$ et $w_1\,, w_2 \in T_u T_y Y$ nous avons

$$\bar{\bar{g}}(w_1\,, w_2) = g(KTi(w_1)\,, KTi(w_2))\,.$$

La structure riemanienne $\bar{\bar{g}}$ est complète car elle coïncide avec celle qu'on obtient en considérant $T_y Y$ comme un espace de Hilbert pour le produit intérieur g_y et en identifiant $T_u T_y Y$ et $T_y Y$ au moyen de K.

On montre que dans nos hypothèses

$$(12) \qquad g(T_u f(w)\,, T_u f(w)) \geq \bar{\bar{g}}(w\,, w)\,, \qquad \text{pour tout} \quad w \in T_u T_y Y\,.$$

Maintenant nous remarquons que $\mathcal{K}(u \wedge v) \leq 0$ si et seulement si

$$\langle \overset{\circ}{R}_y(v\,, u)\,u\,, v\rangle_y \leq 0 \qquad \text{pour tout} \quad y \in Y,\; u\,, v \in T_y Y\,.$$

On considère la fonction réelle des valeurs réelles

$$t \to g(\alpha(t)\,, \alpha(t)) = h(t)\,.$$

Alors on a

$$h'(t) = \frac{d}{dt}(g(\alpha\,, \alpha)) = 2\,g\left(\frac{D\alpha}{dt}\,, \alpha\right)$$

et

$$h''(t) = 2\,\frac{d}{dt}\,g\left(\frac{D\alpha}{dt}\,, \alpha\right) = 2\,g\left(\frac{D^2\alpha}{dt^2}\,, \alpha\right) + 2\,g\left(\frac{D\alpha}{dt}\,, \frac{D\alpha}{dt}\right) =$$

$$= 2\,g(-R(\alpha\,, \dot{c})\,\dot{c}\,, \alpha) + 2\,g\left(\frac{D\alpha}{dt}\,, \frac{D\alpha}{dt}\right).$$

On remarque donc que

$$h''(t) \geq 0 \tag{13}$$

et que $h(0) = h'(0) = 0$, puisque $\alpha(0) = T\tau_Y(w) = 0$. En appliquant la formule de Taylor à la fonction $h(t)$:

$$h(t) = h(0) + th'(0) + \frac{t^2}{2} h''(0) + \int_0^1 (1-s)\, h''(st)\, t^2 \, ds$$

et en tenant compte de (13) on obtient

$$h(t) \geq \frac{t^2}{2} h''(0),$$

d'où, en particulier pour $t = 1$,

$$g(\alpha(1), \alpha(1)) \geq g\left(\frac{D\alpha}{dt}(0), \frac{D\alpha}{dt}(0)\right)$$

c'est-à-dire bien l'inégalité cherchée (12).

(12) montre que $(T_u f)^{-1}$ est localement bornée au-dessus de Y. Mais alors, en vertu de la Proposition-Corollaire 3.12. [4, p. 23], il résulte que f est un revêtement surjectif.

COROLLAIRE. *Si* X *est une* C^r*-variété riemannienne* ($r \geq 3$) *simplement connexe, complète et de courbure sectionnelle partout négative ou nulle, elle est alors difféomorphe avec un espace de Hilbert.*

Dans ce cas tous deux points peuvent être joints par un segment de géodésique (unique) dont la longueur est égale à la distance entre ces points.

Pour $y \in Y$ on note

$$B_r(y) = \{z \in Y \mid d_Y(z, y) < r\}$$

et

$$S_r(y) = \{z \in Y \mid d_Y(z, y) = r\}. \qquad (r \geq 0)$$

Soit maintenant $B_\varepsilon(y)$ un voisinage sphérique normal de y, c'est à-dire $B_\varepsilon(y)$ est difféomorphe à la boule ouverte $\Sigma_\varepsilon(0) = \{v \in T_y Y, 0 \leq \|v\| < \varepsilon\}$ de $T_y Y$, par l'application exp. Si $r < \varepsilon$, alors $S_r(y)$ est l'image de la boule $\|v\| = r$ de $T_y Y$ par le difféomorphisme $\exp_y$. De cette manière, $S_r(y)$ est une sous-variété de $Y : S_r(y) \subset Y$.

LEMME 2.3. *Si* $r < \varepsilon$, *alors toute géodésique* γ *ayant l'origine dans* y *est orthogonale à* $S_r(y)$ *dans le premier point de l'intersection.*

Preuve. Supposons que la géodésique γ est paramétrisée par rapport à l'élément d'arc, considéré de point y, et soit v son vecteur tangent en y. Soit Σ la sphère unité de $T_y Y$. Alors on a $\|v\| = 1$, c'est-à-dire $v \in \Sigma$, et le segment de géodésique γ de y au premier point d'intersection avec $S_r(y)$ est donné par $\gamma(s) = \exp(sv)$ $(0 \leq s \leq r)$. Soit w le vecteur tangent à $S_r(y)$ en $\gamma(r)$. Il existe alors un vecteur unique w_0 tangent à Σ en v, tel que

$$T_{(r,v)}\, \varphi(0, w_0) = w, \qquad \text{où} \quad \varphi(t, v) = \exp(tv).$$

De là suit que

$$g\left(T_r \gamma\left(\frac{d}{ds}\right), w\right) = (\varphi^* g)\left(\left(\frac{d}{ds}, 0\right), (0, w_0)\right) = 0. \qquad \text{C.q.f.d.}$$

On suppose maintenant que Y est une C^r–variété riemannienne, simplement connexe, complète et de courbure sectionnelle partout négative ou nulle et soit $y \in Y$. Dans ces conditions il arrive le

LEMME 2.4. *Si* $\gamma : t \to \gamma(t)$ $(0 \leq t \leq l)$ *est un segment de courbe paramétrisé par rapport à la longueur d'arc, qui ne contient pas* y, *alors*

$$\left[\frac{d}{dt} d_Y(\gamma(t), y)\right]_{t=0} = \cos\lambda ,$$

où par λ *nous avons noté l'angle entre la courbe* γ *et la géodésique qui joint le point* y *à* $\gamma(0)$ *en* $\gamma(0)$.

Preuve. On considère le point $\Gamma(t) \in T_yY$ tel que $\exp_y \Gamma(t) = \gamma(t)$. On note par d_{T_yY} la distance définie sur l'espace T_yY. Alors on a

$$\left[\frac{d}{dt} d_Y(\gamma(t), y)\right]_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[d_Y(\gamma(t), y) - d_Y(\gamma(0), y)\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\,d_Y(\gamma(0), y)\,t}\left[d_Y^2(\gamma(t), y) - d_Y^2(\gamma(0), y)\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\,d_{T_yY}(\Gamma(0), y)\,t}\left[d_{T_yY}^2(\Gamma(t), y) - d_{T_yY}^2(\Gamma(0), y)\right].$$

T_yY étant un espace de Hilbert, on a

$$d_{T_yY}^2(\Gamma(t), y) - d_{T_yY}^2(\Gamma(0), y) = d_{T_yY}^2(\Gamma(0), \Gamma(t)) +$$
$$+ 2\,d_{T_yY}(\Gamma(0), y)\,d_{T_yY}(\Gamma(0), \Gamma(t))\cos\Lambda(t),$$

où $\Lambda(t)$ est l'angle entre les droites $(y, \Gamma(0))$ et $(\Gamma(0), \Gamma(t))$. Puisque $\exp_y$ est un difféomorphisme global (voir le Corollaire du Théorème 2.1), l'application $t \to \Gamma(t)$ $(0 \leq t \leq l)$ est un segment de courbe. On note par w le vecteur tangent à cette courbe en $\Gamma(0)$, par $\sigma(t)$ la longueur de cette courbe de $\Gamma(0)$ à $\Gamma(t)$ et par Λ l'angle entre w et $(y, \Gamma(0))$. Alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{d_{T_yY}(\Gamma(0), \Gamma(t))}{\sigma(t)} = 1 \quad , \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sigma(t)}{t\|w\|} = 1 ,$$

d'où suit que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, d_{T_yY}^2(\Gamma(0), \Gamma(t)) = 0 .$$

Donc,

$$\left[\frac{d}{dt} d_Y(\gamma(t), y)\right]_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, d_{T_yY}(\Gamma(0), \Gamma(t))\cos\Lambda(t) = \|w\|\cos\Lambda .$$

D'autre part il faut observer qu'on puisse écrire $w = w_0 + w_1$ où w_0 a la direction de la droite $(y, \Gamma(0))$, et w_1 est orthogonal à cette droite. De la démonstration du lemme 2.3 il résulte que le vecteur $T_{\Gamma(0)} \exp(w_1)$ est orthogonal à la géodésique qui joint y à $\gamma(0)$, en $\gamma(0)$. C'est pour cela de même que de $\|T_{\Gamma(0)} \exp(w_0)\| = \|w_0\|$ il résulte que

$$\|w\|\cos\Lambda = \|T_{\Gamma(0)} \exp(w)\|\cos\lambda = \cos\lambda \qquad \text{C.q.f.d.}$$

LEMME 2.5. *Soit* Y *une* C^∞*–variété riemannienne de courbure sectionnelle partout négative ou nulle et* $y \in Y$. *Soit* U_0 *un sous-ensemble ouvert de* T_yY *étoilé par rapport à l'origine, tel que l'application exponentielle* $\exp_y : U_0 \to Y$

soit de classe C^∞ *dont la différentielle* $T_u \exp_y$ *soit une application biunivoque pour chaque* $u \in U_0$. *Alors*

$$\| T_u \exp_y (w) \| \geq \| w \| , \tag{14}$$

où $u \in U_0$, *et* w *est un vecteur tangent à* U_0 *en* u.

En particulier

$$L(\exp_y \circ \Gamma) \geq L(\Gamma) ,$$

pour tout segment de courbe Γ *de* U_0, *où on a noté par* L *la longueur d'arc.*

La démonstration reprend des détails techniques déjà présentés au cours de la preuve du Théorème 2.1. En conséquence on peut l'omettre. Seulement il faut observer que l'inégalité (14) se réduit à (12).

THÉORÈME 2.2. *Soit* Y *une* C^∞*–variété riemannienne complète, de courbure sectionnelle partout négative ou nulle et soit* V *une sphère normale convexe de* Y (c'est–à–dire une sphère ayant la propriété que tous deux points de V peuvent être joints par un segment de géodésique unique qui se trouve en V dont la longueur est égale à la distance entre ses bouts). *Soit* ABC *un triangle en* V, *dont les angles sont égaux à* A , B , C, *les côtés étant des géodésiques de longuers respectivement égales à* a , b , c. *Alors*

$$a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C \leq c^2 , \tag{15}$$

et

$$A + B + C \leq \pi . \tag{16}$$

Preuve. Soient γ_a , γ_b, γ_c les géodésiques qui déterminent le triangle ABC et soient Γ_a , Γ_b , Γ_c les segments de courbe correspondants de l'espace tangent $T_C Y$, c'est–à–dire $\exp_C \circ \Gamma_a = \gamma_a$ etc. Soit Γ_0 le segment de droite de $T_C Y$ qui joint les bouts du segment Γ_c. Posons $\gamma_0 = \exp_C \circ \Gamma_0$. Alors on a

$$a = L(\Gamma_a) = L(\gamma_a) ,$$

$$b = L(\Gamma_b) = L(\gamma_b) ,$$

$$L(\Gamma_0) \leq L(\Gamma_c) \quad , \quad L^2(\Gamma_0) = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C ,$$

parce que l'angle entre Γ_a et Γ_b est C.

Maintenant, en tenant compte de l'hypothèse et du lemme 2.5, il résulte que

$$L(\Gamma_c) \leq L(\exp_C \circ \Gamma_c) = L(\gamma_c) = c ,$$

d'où suit (15).

Enfin pour montrer (16) observons d'abord qu'en vertu de la manière qu'on a choisi V, on a $a = d_Y(B , C)$, $b = d_Y(C , A)$, $c = d_Y(A , B)$ et, par conséquence, chaque longueur a , b , c ne dépasse pas la somme des deux autres. A cause de cela il existe un triangle plan usuel dont les côtés sont respectivement égaux à a , b , c. En notant les angles de ce triangle par A', B', C', alors en vertu de la propriété (15) on a $A \leq A'$, $B \leq B'$, $C \leq C'$. Mais comme $A' + B' + C' = \pi$, on obtient l'inégalité (16).

THÉORÈME 2.3. *Soit* Y *une* C^∞*–variété riemannienne complète, simplement connexe, de courbure sectionelle partout négative ou nulle. Soit* X *une sous–variété fermée* $(X \subset Y)$ *totalement géodésique de* Y. *Alors, n'importe quel soit* $x \in X$, *la fibre de la fibration normale de l'application d'inclusion* $i : X \rightarrow Y$ *en* x *est formée par la totalité de* Y*–géodésiques orthogonales à* X *en* x.

Preuve. Pour démontrer ce théorème il suffit de montrer que pour tout $x \in X$, l'ensemble des géodésiques orthogonales à X en x constitue une sous–variété fermée N_x de Y et que chaque $y \in Y$ appartient à une telle sous–variété.

Vérifions d'abord la première affirmation. Soit $\exp_x : T_x Y \rightarrow Y$ l'application exponentielle définie dans un point $x \in X$ et soit H_x le complément orthogonal de l'espace tangent $T_x X$ dans $T_x Y$. H_x est isomorphe à l'espace quotient $T_x Y / T_x X$, parce que $T_x X$ est un facteur direct en $T_x Y$. L'application d'inclusion $i : X \rightarrow Y$ étant un plongement fermé, il résulte que X est complète et comme les X–géodésiques sont aussi des Y–géodésiques (lemme 2.2) il résulte que

$$X = \exp_x (T_x X) .$$

Par définition, $N_x = \exp_x (H_x)$. Parce que $\exp_x$ est un difféomorphisme (le Corollaire du Théorème 2.1), il résulte que N_x est une sous–variété termée de Y.

Pour vérifier la deuxième affirmation, considérons maintenant un point $y \in Y$, tel que $y \bar{\in} X$. Parce que X est un sous–espace fermé il résulte qu'il existe $x_0 \in X$ qui se trouve à la moindre distance de y. Montrons que $y \in N_{x_0}$, c'est–à dire l'unique géodésique γ qui joint y à x_0 est orthogonale à X. En effet, si $c : t \rightarrow c(t)$ est une courbe quelconque de X, alors en vertu du lemme 2.4 on a

$$\frac{d}{dt} d_Y (c(t), y) = \cos \alpha (t) ,$$

où $\alpha(t)$ est l'angle entre c et la géodésique qui joint y à $c(t)$. Donc, si la géodésique qui joint y à X est orthogonale à X, alors il faut qu'elle coincide à γ, parce que en vertu du Théorème 2.1 la somme des angles d'un triangle géodésique de Y ne dépasse pas π. C.q.f.d.

3. DÉMONSTRATION DE (B).

Maintenant nous allons démontrer un autre résultat annoncé dans l'introduction, nommément le

THÉORÈME 3.1. *Si* Y *est une* C^∞*–variété riemannienne complète, simplement connexe, de courbure sectionnelle partout négative ou nulle et* **K** *est un groupe de Lie compact qui opère principalement sur* Y *comme groupe de isométries, les transformations de* **K** *ont un point fixe commun.*

Preuve. Sans restreindre la généralité on peut supposer que Y est un espace de Hilbert séparable $\mathbf{H}$ (le Corollaire du Théorème 2.1). Soit alors $d_{\mathbf{H}}(x, y) = \| y - x \|$ la distance définie par la norme de $\mathbf{H}$ et soit μ une mesure invariante à gauche, positive sur $\mathbf{K}$ (la soi-disant mesure de Haar) normée par la condition

$$\int_{\mathbf{K}} \mu(\mathrm{d}k) = 1 .$$

Choisissons $x \in \mathbf{H}$ et considérons la fonctionnelle réelle non négative $F : \mathbf{H} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, définie par

$$F(y) = \int_{\mathbf{K}} \| y - \varphi(k, x) \|^2 \mu(\mathrm{d}k) ,$$

où $\varphi : \mathbf{K} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ note l'action de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{H}$. La fonctionnelle F tellement définie est convexe. En effet, en tenant compte de l'inégalité de Schwarz et et de l'inégalité

$$\| y_1 - \varphi(k, x) \| \, \| y_2 - \varphi(k, x) \| \leq \frac{1}{2} [\| y_1 - \varphi(k, x) \|^2 + \| y_2 - \varphi(k, x) \|^2]$$

on a

$$\begin{aligned} F[\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2] &= \int_{\mathbf{K}} \| \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 - \varphi(k, x) \|^2 \mu(\mathrm{d}k) \leq \\ &\leq \lambda^2 \int_{\mathbf{K}} \| y_1 - \varphi(k, x) \|^2 \mu(\mathrm{d}k) + 2\lambda(1-\lambda) \int_{\mathbf{K}} \| y_1 - \varphi(k, x) \| \cdot \\ &\cdot \| y_2 - \varphi(k, x) \| \mu(\mathrm{d}k) + (1-\lambda)^2 \int_{\mathbf{K}} \| y_2 - \varphi(k, x) \|^2 \mu(\mathrm{d}k) \leq \\ &\leq \lambda^2 F(y_1) + \lambda(1-\lambda) [F(y_1) + F(y_2)] + (1-\lambda)^2 F(y_2) = \\ &= \lambda F(y_1) + (1-\lambda) F(y_2) , \end{aligned}$$

où $y_1, y_2 \in \mathbf{H}$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Observons aussi que F est continue sur $\mathbf{H}$ et encore que $F(y) \to +\infty$ lorsque $\| y \| \to +\infty$, parce que la mesure de $\mathbf{K}$ est finie. Mais alors la fonctionnelle F admet un minimum sur $\mathbf{H}$, c'est-à-dire il existe un $y_0 \in \mathbf{H}$ tel que $F(y) \geq F(y_0)$ pour tout $y \in \mathbf{H}$. En tenant compte maintenant que les éléments de $\mathbf{K}$ opèrent comme des isométries sur $\mathbf{H}$, on a

$$F(\varphi(k, y_0)) = F(y_0) , \qquad \text{pour tout} \quad k \in \mathbf{K} .$$

Montrons maintenant que y_0 est le point fixe cherché, c'est-à-dire que $\varphi(k, y_0) = y_0$ pour tout $k \in \mathbf{K}$. Pour cela il suffit de vérifier que

$$F(y) > F(y_0) , \qquad \text{pour tout} \quad y \neq y_0 \text{ de } \mathbf{H} . \tag{17}$$

En effet, si par absurde on supposait que $\varphi(k, y_0) \neq y_0$, en vertu de la convexité de F, on obtiendrait

$$F\left(\frac{\varphi(k, y_0) + y_0}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(F(\varphi(k, y_0)) + F(y_0)) \leq F(y_0),$$

ce qui est impossible à cause de (17).

Soit alors $y \neq y_0$ et soit $t \to y_t = y_0 + t(y - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$ la droite qui joint y_0 à y. Si $\varphi(k, x) \neq y_t$, soit $\lambda_t(k)$ l'angle entre les droites (y_t, y) et $(\varphi(k, x), y_t)$. En vertu du lemme 2.4 on a

$$\frac{d}{dt} d^2_{\mathbf{H}}(y_t, \varphi(k, x)) = \begin{cases} 2 d_{\mathbf{H}}(y_t, \varphi(k, x)) \cos \lambda_t(k), & \text{si} \quad \varphi(k, x) \neq y_t \\ 0 & \text{si} \quad \varphi(k, x) = y_t . \end{cases} \tag{18}$$

Montrons que la fonction

$$G(t, k) = \frac{d}{dt} d^2_{\mathbf{H}}(y_t, \varphi(k, x)), \qquad (t \in [0, 1], \ k \in \mathbf{K})$$

est continue en chaque point de forme $(0, k)$ $(k \in \mathbf{K})$. Il est évident qu'alors G est continue sur $[0, 1] \times \mathbf{K}$.

Soit $\mathbf{K}_1$ l'ensemble (fermé) de ces éléments $k \in \mathbf{K}$, tel que $\varphi(k, x) = y_0$ et on note par $\mathbf{K}_2$ le complément de $\mathbf{K}_1$ dans $\mathbf{K}$. L'application $k \to \varphi(k, x)$ (x fixé) de $\mathbf{K}$ en $\mathbf{H}$ est de classe C^∞. D'autre part il est évident que la fonction $(t, k) \to \cos \lambda_t(k)$ est continue en $(0, k_0)$, si $k_0 \in \mathbf{K}_2$. Soit maintenant $k_0 \in \mathbf{K}_1$ et soit une suite (t_n, k_n) qui converge vers $(0, k_0)$. En vertu de (18) on a

$$|G(t, k)| \leq 2 d_{\mathbf{H}}(y_t, \varphi(k, x)),$$

d'où il résulte que $G(t_n, k_n) \to G(0, k_0)$, parce que $d_{\mathbf{H}}(y_{t_n}, \varphi(k_n, x)) \to$ $\to d_{\mathbf{H}}(y_0, \varphi(k_0, x)) = 0$. De telle manière la continuité de G est prouvée. De cela il suit que la fonction $t \to F(y_t)$ est dérivable et sa dérivée peut être obtenue en dérivant purement et simplement sous le signe d'intégrale. Puisqu'on obtient le minimum dans le point $t = 0$, de (18) suit

$$\int_{\mathbf{K}_2} d_{\mathbf{H}}(y_0, \varphi(k, x)) \cos \lambda_0(k) \, \mu(dk) = 0 .$$

En tenant maintenant compte qu'on se trouve dans un espace de Hilbert, on a

$$d^2_{\mathbf{H}}(y, \varphi(k, x)) = d^2_{\mathbf{H}}(y_0, \varphi(k, x)) + d^2_{\mathbf{H}}(y_0, y) - 2 d_{\mathbf{H}}(y_0, \varphi(k, x)) \cdot$$
$$\cdot d_{\mathbf{H}}(y_0, y) \cos(\pi - \lambda_0(k)), \qquad \text{pour} \quad k \in \mathbf{K}_2,$$

d'où, par intégration, on obtient

$$\int_{\mathbf{K}_2} d^2_{\mathbf{H}}(y, \varphi(k, x)) \, \mu(dk) = \int_{\mathbf{K}_2} d^2_{\mathbf{H}}(y_0, \varphi(k, x)) \, \mu(dk) + d^2_{\mathbf{H}}(y_0, y) \int_{\mathbf{K}_2} \mu(dk) .$$

Si $k \in \mathbf{K}_1$ cette égalité est triviale. En sommant ces deux égalités, on obtient

$$F(y) = F(y_0) + d_{\mathbf{H}}^2(y, y_0),$$

d'où

$$F(y) > F(y_0), \qquad \text{pour tout } \ y \neq y_0 \ \text{ de } \mathbf{H}. \qquad \text{C.q.f.d.}$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] EELLS, J. JR., *A setting for global analysis*, « Bull. of the Amer. Math. Soc. », *72*, 751–807 (1966).

[2] HELGASON, S., *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York and London, 1962 (Edition russe, Moscou 1964).

[3] LANG, S., *Introduction aux variétés différentiables*, Dunod, Paris 1967.

[4] PENOT, J. P., *De submersions en fibrations*, Séminaire de Géométrie différentielle de M.elle Libermann, Paris 1967.