Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Cerofolini

Sulle tracce sulla varietà M delle soluzioni in $M \times (0, +\infty)$ di una equazione omogenea di tipo parabolico

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.5, p. 236–239.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_5_236_0>

Equazioni differenziali. — *Sulle tracce sulla varietà* M *delle soluzioni in* $M \times (0, +\infty)$ *di una equazione omogenea di tipo parabolico* (*).

Nota di LUIGI CEROFOLINI, presentata (**) dal Corrisp. G. CIMMINO.

SUMMARY. — The paper gives a characterization of the traces, that are indicated in the title, in the case of a compact manifold M.

INTRODUZIONE.

In questa Nota si estendono al caso di una varietà qualsiasi M compatta e chiusa e di un operatore di tipo parabolico $P = A + \partial/\partial t$ su un fibrato di base $M \times (0, +\infty)$, con A un operatore ellittico su un fibrato di base M, i risultati ottenuti in [1] nel caso di $M = S^1 = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\}$, intesa come sottovarietà di $\mathbf{R}^2$ e $A = (-1)^{m+1} D^m$, dove D è l'operatore di derivazione ordinario su S^1.

Già nel caso particolarissimo sopra citato si osservava come le tracce su M delle soluzioni in $M \times (0, +\infty)$ dell'equazione omogenea di tipo parabolico

$$\left[(-1)^{m+1} D^m + \frac{\partial}{\partial t}\right] u = 0$$

possono essere delle ultra–distribuzioni più generali dei funzionali analitici su M nel senso di [2]. Lo stesso risultato vale anche nel caso generale che qui viene considerato.

§ 0. NOTAZIONI E RICHIAMI (cfr.: [4]).

Sia M una varietà reale C^∞ compatta e chiusa, dx una densità positiva di classe C^∞ e ξ un fibrato vettoriale complesso ed ermitiano. Resta così assegnato, con regolarità di classe C^∞ dipendente dal punto $x \in M$, un prodotto interno $\langle , \rangle_x$ su ogni fibra ξ_x di ξ. Se f e $g \in C^\infty(\xi)$ poniamo

$$(0,1) \qquad (f, g) = \int_M \langle f(x), g(x) \rangle_x \, dx$$

Se $A : C^\infty(\xi) \to C^\infty(\xi)$ è un operatore differenziale d'ordine m e A^* il suo aggiunto formale allora, essendo M chiusa ($\partial M = \varnothing$), si ha:

$$(0,2) \qquad (Af, g) - (f, A^* g) = 0$$

per ogni $f, g \in C^\infty(\xi)$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca per la Matematica del C.NR.

(**) Nella seduta del 15 novembre 1969.

Inoltre se A è ellittico positivo d'ordine m e $A = A^*$, è noto che esiste una base ortonormale $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ in $L_2(\xi)$, $\varphi_k \in C^\infty(\xi)$, di autosezioni tali che

$$A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k \tag{0,3}$$

e i corrispondenti autovalori λ_k sono ≥ 0, e $\lambda_k \uparrow +\infty$.

Inoltre $f \in C^\infty(\xi)$ se e solo se $\sum_{k=0}^{\infty} |(f, \varphi_k)| \lambda_k^\nu < +\infty$ per ogni ν intero positivo e se M è una varietà analitica allora $f \in C^\infty(\xi)$ è analitica se e solo se $\sum_{k=0}^{\infty} |(f, \varphi_k)| \rho^{u_k} < +\infty$, $\exists \rho > 1$, dove $u_k = \sqrt[m]{\lambda_k}$.

§ 1. OPERATORI PARABOLICI SU FIBRATI VETTORIALI.

Sia $A : C^\infty(\xi) \to C^\infty(\xi)$ un operatore ellittico positivo d'ordine m e autoaggiunto, cioè $A = A^*$.

Sulla varietà $M \times (0, +\infty)$ consideriamo il fibrato vettoriale $\xi \otimes \mathbf{C}_{(0,+\infty)}$ dove $\mathbf{C}_{(0,+\infty)}$ è il fibrato banale $(0, \infty) \times \mathbf{C}$; sia $P : C^\infty(\xi \otimes \mathbf{C}_{(0,+\infty)}) \to$ $\to C^\infty(\xi \otimes \mathbf{C}_{(0,+\infty)})$ definita da:

$$P = A + \frac{\partial}{\partial t} \cdot$$

Indichiamo con $\mathcal{H}$ lo spazio della $u \in C^\infty(\xi \otimes \mathbf{C}_{(0,+\infty)})$ tale che $Pu = 0$.

Si ha allora:

PROPOSIZIONE 1. Tutte le $u \in \mathcal{H}$ sono date da:

$$u(x, t) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\, \alpha_k \varphi_k(x)\, e^{-\lambda_k t} \tag{1.1}$$

in corrispondenza a tutte le successioni $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ tali che

$$\sum_{0}^{+\infty}{}_k\, |\alpha_k|\, \rho^{-\lambda_k} < +\infty, \qquad \forall \rho > 1. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Se t_1 e $t_2 \in (0, +\infty)$, $\varphi \in C^\infty(\xi)$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(Pu, \varphi e^{\lambda t}) - (u, P^*(\varphi e^{\lambda t}))]\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [(Au, \varphi) - (u, A^* \varphi)]\, e^{\lambda t}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} [(u, \varphi)\, e^{\lambda t}]\, dt .$$

Se ora $\varphi \in C^\infty(\xi)$ è tale che $A\varphi = \lambda\varphi$ e $u \in \mathcal{H}$, tenendo conto di (0.2) possiamo affermare che

$$(u(\cdot, t_1), \varphi)\, e^{\lambda t_1} - (\mu(\cdot, t_2), \varphi)\, e^{\lambda t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} [(u, \varphi)\, e^{\lambda t}]\, dt = 0$$

per ogni t_1 e $t_2 \in (0, +\infty)$.

Allora se per ogni k intero ≥ 0 poniamo:

$$\alpha_k = (u, \varphi_k)\, e^{\lambda_k t}$$

dove $A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$, per ogni $t > 0$ si ha che

$$\alpha_k\, e^{-\lambda_k t} = (u, \varphi_k)$$

sono i coefficienti di Fourier di $u(x, t)$ rispetto alla base $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ e quindi, data la regolarità di $u \in \mathcal{H}$ si ha lo sviluppo (1–1).

Infatti poiché si ha: $(A^n u, \varphi_k) = (u, A^n \varphi_k) = \lambda_k^n (u, \varphi_k)$, si può scrivere per ogni n intero ≥ 1

$$A^n u = \sum_{k=0}^{\infty} (A^n u, \varphi_k)\, \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} (u, \varphi_k)\, A^n \varphi_k$$

la convergenza delle serie intesa in norma di $L_2(\xi)$, ma si ha anche la convergenza delle serie (1–1) per topologia di $C^\infty(\xi)$ essendo A un operatore ellittico. Per quanto detto in fondo al § 0 si ha subito la proprietà (1–2) per la successione $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ ponendo $\log \rho = t$.

Viceversa data una successione $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ che verifica (1–2) è immediato vedere che lo sviluppo (1–1) verifica $Pu = 0$ ed è convergente nella topologia di $C^\infty(\xi \otimes \mathbf{C}_{(0,+\infty)})$.

Tracce delle soluzioni su M.

Se φ_k e λ_k sono tali che $A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ per ogni intero $k \geq 0$, poniamo:

$$\Phi = \left\{ \varphi \in C^\infty(\xi) \,;\, \sum_{k=0}^{+\infty} |(\varphi, \varphi_k)|\, \rho^{\lambda_k} < +\infty \,,\, \exists \rho > 1 \right\}$$

e

$$A = \left\{ \varphi \in C^\infty(\xi) \,;\, \sum_{k=0}^{+\infty} |(\varphi, \varphi_k)|\, \rho^{\sqrt[m]{\lambda_k}} < +\infty \,,\, \exists \rho > 1 \right\}.$$

Allora è noto (cf.: [4], [5]) che, nel caso analitico, A è la totalità delle sezioni analitiche di ξ, ed in ogni caso si ha ovviamente $\Phi \subset A$.

È chiaro poi che per ogni $u \in \mathcal{H}$ e $t > 0$ l'applicazione:

$$L_t(\varphi) = \int_M \langle u(x, t), \varphi(x)\rangle_x \, dx$$

è un funzionale antilineare su Φ.

È quindi naturale dire che il funzionale antilineare L è la traccia su M di $u \in \mathcal{H}$ se:

$$\lim_{t\to 0} L_t(\varphi) = L(\varphi)$$

per ogni $\varphi \in \Phi$.

Se consideriamo adesso i due spazi di successioni:

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\geq 0} \,;\, \sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k| \, \rho^{-\lambda_k} < +\infty \,,\, \forall \rho > 1 \right\}$$

e

$$\mathcal{B} = \left\{ \beta = (\beta_k)_{k\geq 0} \,;\, \sum_{k=0}^{+\infty} |\beta_k| \, \rho^{\lambda_k} < +\infty \,,\, \exists \rho > 1 \right\}$$

è noto (fc.: [3]) che il duale topologico $\mathcal{A}'$ di $\mathcal{A}$, per la sua topologia naturale di spazio di Fréchet, è $\mathcal{B}$ e la forma sesquilineare canonica della dualità è data da:

$$\langle \alpha \,,\, \beta \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \, \bar{\beta}_k$$

la serie essendo assolutamente convergente. Se trasportiamo a Φ la topologia naturale di $\mathcal{B}$, ottenuta dalla dualità con $\mathcal{A}$, si ha subito:

PROPOSIZIONE 2. Per ogni $L \in \bar{\Phi}'$ esiste ed unica $u \in \mathcal{H}$:

$$\lim_{t\to 0} L_t(\varphi) = L(\varphi)$$

per ogni $\varphi \in \Phi$.

Dimostrazione. Infatti se $\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \, \varphi_k$ e $L \in \bar{\Phi}'$ esiste ed unica una $\alpha \in \mathcal{A}$:

$$\langle \alpha \,,\, \beta \rangle = L(\varphi)$$

Se allora $u(x\,,t) = \sum_0^{+\infty}{}_k \, \alpha_k \, \varphi_k \, e^{-\lambda_k t}$ si ha che per ogni $t > 0$

$$\int_M \langle u(x\,,t) \,,\, \varphi(x) \rangle_x \, dx = \sum_0^{+\infty}{}_k \, \alpha_k \, \beta_k \, e^{-\lambda_k t}$$

e quindi passando al limite per $t \to 0$ si ha:

$$\lim_{t\to 0} L_t(\varphi) = \langle \alpha \,,\, \beta \rangle = L(\varphi).$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] CEROFOLINI L., *Sulla totalità delle soluzioni di una equazione di tipo parabolico su di una varietà*, « Boll. Un. Mat. Italiana », (4), N. 1 (1969).

[2] CIMMINO G., *Su alcuni esempi notevoli di dualità per spazi lineari topologici*, « Rend. Sem. Mat. Fisico ». Milano 1962.

[3] KÖTHE, *Topologische lineare Räume*, Springer Verlag, Berlin 1960.

[4] PALAIS R., *Seminar on the Atyah. Singer index theorem*, « Ann. of Math. Studies », 57 (1965).

[5] SEELEY R. T., *Integro-differential operators on vector bundles*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *117* (1965).