Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Froim Marcus

Trasformazioni W di Fubini delle superficie isotermo-asintotiche e teorema di permutabilità del Bianchi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.3-4, p. 160–166.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_3-4_160_0>

Geometria. — *Trasformazioni* W *di Fubini delle superficie isotermo–asintotiche e teorema di permutabilità del Bianchi.* Nota (*)
di Froim Marcus, presentata dal Socio B. Segre.

In memoria della mia cara Daisy.

Résumé. — On donne une interprétation géométrique de la condition de Fubini afin que toutes les surfaces du théorème de permutabilité de Bianchi pour une surface isothérmo–asymptotique soient isothermo–asympthotiques.

On fait voir comment il faut énoncer le théorème de permutabilité de Bianchi et le théorème reciproque relatif, dans un cas important.

1. Il teorema di permutabilità del Bianchi relativo alle congruenze W si enuncia di solito così (ved. per esempio A. Terracini [1]):

Se, a partire da una superficie S, *se ne costruiscono due trasformate per congruenze* W , $\overline{S}_1$ *e* $\overline{S}_2$, *esistono* ∞^1 *superficie* S_{12}, *che sono contemporaneamente trasformate asintotiche comuni di* $\overline{S}_1$ *e di* $\overline{S}_2$.

Proiettivamente il teorema è stato dimostrato da G. Fubini [2] mediante il suo metodo per lo studio delle congruenze W.

Per chiarezza, daremo anzitutto un riassunto di questo metodo.

Sia S una superficie che sia la prima falda focale di una congruenza W e u, v i parametri asintotici. La seconda falda focale $\overline{S}$ della congruenza viene descritta dal punto $\overline{x}$ dato dalla

$$\overline{x} = \mu x + 2\,(\mathrm{A}x_u + \mathrm{B}x_v)\,, \tag{1.1}$$

dove A , B sono due soluzioni del sistema

$$\mathrm{A}_v = -\mathrm{B}\gamma \quad ; \quad \mathrm{B}_u = -\mathrm{A}\beta\,, \tag{1.2}$$

e

$$\mu = -\mathrm{A}_u - \mathrm{A}\theta_u - \mathrm{B}_v - \mathrm{B}\theta_v\,. \tag{1.3}$$

Per conoscere i coefficienti del sistema

$$\begin{aligned} \overline{x}_{uv} &= \overline{\theta}_u \overline{x}_u + \overline{\beta}\overline{x}_v + \overline{p}_{11}\overline{x}\,, \\ \overline{x}_{vv} &= \overline{\gamma}\overline{x}_u + \overline{\theta}_v \overline{x}_v + \overline{p}_{22}\overline{x}\,, \end{aligned} \tag{1.4}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1969.

che determina la seconda falda focale, Fubini introduce le tre funzioni N , S , T definite dalle

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} &N = \lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap_{11}) - 2B(\mu_v + 2Bp_{22}), \\ &S = \frac{N_u}{2A} \quad ; \quad T = -\frac{N_v}{2B}, \end{aligned}$$

dove

$$(1.6)\qquad \lambda = -A_u - A\theta_u + B_v + B\theta_v .$$

Si ha così:

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} &\bar\theta = \theta + \log|N| \quad ; \quad \bar\beta = -\beta - 2B\frac{S}{N} \quad ; \quad \bar\gamma = -\gamma - 2A\frac{T}{N}, \\ &\bar p_{11} = \pi_{11} + \frac{\lambda S}{N} \quad ; \quad \bar p_{22} = \pi_{22} + \lambda\frac{T}{N}, \end{aligned}$$

N dovendo anche soddisfare l'equazione fondamentale, detta equazione in N,

$$(1.8)\qquad N_{uv} + \frac{A}{B}\beta N_v + \frac{B}{A}\gamma N_u .$$

2. Due superficie falde focali di una stessa congruenza W diconsi trasformate W l'una dell'altra. Per la dimostrazione del teorema di permutabilità del Bianchi, Fubini considera due congruenze W aventi una stessa falda focale S. Siano $\bar S_1$ ed $\bar S_2$ le seconde falde focali descritte rispettivamente dai punti $\bar x_1$ e $\bar x_2$, e A_i, B_i, μ_i, λ_i, N_i, S_i e T_i $(i = 1, 2)$ denotino gli elementi caratteristici delle due congruenze.

Se z_1, z_2 sono due costanti, anche $A = z_1A_1 + z_2A_2$ e $B = z_1B_1 + z_2B_2$ soddisfano alle (1.2) e perciò determinano ancora una congruenza W. Il relativo valore di N è [2]:

$$(2.1)\qquad N = z_1^2 N_1 + z_1 z_2 N_{12} + z_2^2 N_2 ,$$

dove (1)

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} N_{12} = N_{21} = \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + 8(A_1A_2p_{11} - B_1B_2p_{22}) + \\ + 2\left(A_1\frac{\partial\mu_2}{\partial u} + A_2\frac{\partial\mu_1}{\partial u} - B_1\frac{\partial\mu_2}{\partial v} - B_2\frac{\partial\mu_1}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

mentre i valori corrispondenti di S e T sono le funzioni lineari in z_1, z_2: $S = z_1S_1 + z_2S_2$, $T = z_1T_1 + z_2T_2$.

Da $S = \frac{N_u}{2A}$ e $T = -\frac{N_v}{2B}$ e dalle espressioni di A , B e di (2.1) si ha

$$(2.3)\qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial u} = \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u} \quad ; \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial v} = \frac{B_2}{B_1}\frac{\partial N_1}{\partial v} + \frac{B_1}{B_2}\frac{\partial N_2}{\partial v} .$$

(1) A pagina 280 del primo tomo di [3], occorre fare una correzione di segno nella formula (1).

Ciò ha suggerito al Fubini l'idea d'introdurre due funzioni ω, Ω tali che

$$N_{12} = \omega + \Omega\,, \tag{2.4}$$

le funzioni ω, Ω essendo definite dalle:

$$\begin{aligned} \omega_u &= \frac{A_2}{A_1} N_{1u} = 2 A_2 S_1 \quad ; \quad \omega_v = \frac{B_2}{B_1} N_{1v} = -2 B_2 T_1\,, \\ \Omega_u &= \frac{A_1}{A_2} N_{2u} = 2 A_1 S_2 \quad ; \quad \Omega_v = \frac{B_1}{B_2} N_{2v} = -2 B_1 T_2\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Può così dimostrarsi che i punti

$$\begin{aligned} x_{12} &= \omega x + \left(-\lambda_2 x_1 - 2 A_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} + 2 B_2 \frac{\partial x_1}{\partial v}\right), \\ x_{21} &= \Omega x + \left(-\lambda_1 x_2 - 2 A_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} + 2 B_1 \frac{\partial x_2}{\partial v}\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

coincidono, e che il punto $x_{12} = x_{21}$ si trova nel piano tangente alla superficie $\bar{S}_1$ in $\bar{x}_1$ e, parimenti, anche nel piano tangente ad $\bar{S}_2$ in $\bar{x}_2$. Di più, le rette congiungenti $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ ad x_{12} descrivono due congruenze W.

Poiché ω è definita dalle (5) a meno di una costante arbitraria, risulta che le ∞^1 superficie S_{12} si ottengono da S componendo le due date trasformazioni W. Ne discende il risultato di Fubini:

Se S *è trasformata* W *di altre due superficie* $\bar{S}_1$ *e* $\bar{S}_2$, *esistono* ∞^1 *superficie* S_{12} *che sono trasformate* W *sia di* $\bar{S}_1$ *che di* $\bar{S}_2$, *ed anche di tutte le* ∞^1 *superficie trasformate* W *della* S *mediante le congruenze* W *definite dalle* $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$ *e* $B = z_1 B_1 + z_2 B_2$.

I valori di N per le congruenze $(\bar{x}_1, x_{12})$ e $(\bar{x}_2, x_{12})$ si calcolano [3] mediante le:

$$N_1' = N_2 - \frac{\omega\Omega}{N_1} \quad ; \quad N_2' = N_1 - \frac{\omega\Omega}{N_2}\,. \tag{2.7}$$

3. Secondo Fubini, tutte le superficie isotermo–asintotiche sono falde focali di una congruenza sulle cui falde si corrispondono le linee di Darboux. Una superficie isotermo-asintotica è falda focale di ∞^6 congruenze di questa specie, la cui seconda falda focale è ancora isotermo–asintotica. Tutte queste congruenze sono congruenze W. Questo teorema dà una trasformazione per congruenze W delle superficie isotermo–asintotiche per cui la sig.ra Ragazzi [3'] ha dimostrato metricamente il teorema di permutabilità (2). Sia S una superficie isotermo–asintotica e siano $\bar{S}_1$ e $\bar{S}_2$ due trasformate per congruenza W della S. Dalle (2.3) si deduce immediatamente:

$$\omega = \frac{k_1}{k_1 + k_2} N_{12} + C\,, \tag{3.1}$$

(2) Si può notare che, nella dimostrazione, la sig.ra Ragazzi impone una certa condizione analitica senza interpretarla geometricamente.

dove k_i, C sono costanti e le relative superficie del teorema di permutabilità si trovano senza quadrature se $k_1+k_2 \neq 0$. Se $\bar{S}_1$ e $\bar{S}_2$ sono superficie isotermo–asintotiche, tra le superficie S_{12} del teorema di permutabilità ve n'è una sola isotermo–asintotica, che si determina senza quadrature [3].

Se e soltanto se $N_{12}=0$, *allora le* ∞^1 *superficie del teorema di permutabilità determinabili per quadrature, sono isotermo–asintotiche* [3].

Ci proponiamo di dare un'interpretazione geometrica di questa condizione.

Sia S una superficie generica (non rigata), riferita alle sue asintotiche, ed $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ denotino due trasformate per congruenze W della S, generate rispettivamente dai punti $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$.

Al variare di u, v, la retta $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ descrive generalmente una congruenza a falde focali distinte. I punti focali della retta si ottengono dalla:

$$\mathrm{d}(\bar{x}_1+\mathrm{R}\bar{x}_2)-\alpha\bar{x}_1-\tau\bar{x}_2=0\,. \tag{3.2}$$

Dalle (1.1), (1.2), (1.3), (1.6), osservando che $(x\,,x_u\,,x_v\,,x_{uv})\neq 0$, risultano le condizioni:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2\mathrm{R})\,\mathrm{d}u+(\mathrm{A}_1+\mathrm{R}\mathrm{A}_2)\,\mathrm{d}v=0\,,\\
&2\,\mathrm{A}_1\alpha+2\,\mathrm{A}_2\tau+(\lambda_1+\mathrm{R}\lambda_2)\,\mathrm{d}u=0\,,\\
&2\,\mathrm{B}_1\alpha+2\,\mathrm{B}_2\tau-(\lambda_1+\mathrm{R}\lambda_2)\,\mathrm{d}v=0\,,\\
&[\mu_{1u}+2\mathrm{A}_1p_{11}+\mathrm{R}\,(\mu_{2u}+2\,\mathrm{A}_2p_{11}]\,\mathrm{d}u+\\
&\quad+[\mu_{1v}+2\,\mathrm{B}_1p_{22}+\mathrm{R}\,(\mu_{2v}+2\,\mathrm{B}_2\,p_{22})]\,\mathrm{d}v-\alpha\mu_1-\tau\mu_2=0\,.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dalla prima ed ultima, tenendo conto delle altre due condizioni (3), e dalle espressioni di N_1, N_2 e da quella di N_{12} data da (2.2), si ottiene l'equazione in R

$$\mathrm{N}_2\mathrm{R}^2+\mathrm{N}_{12}\mathrm{R}+\mathrm{N}_1=0\,, \tag{3.4}$$

la quale determina i punti focali della congruenza $(\bar{x}_1\,,\bar{x}_2)$. Si vede subito che, se e soltanto se $N_{12}=0$, i punti focali sono coniugati armonici rispetto ai punti $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$. Pertanto:

$N_{12}=0$ *è condizione necessaria e sufficiente affinché i punti focali della retta determinata da due punti che descrivono due trasformate per congruenza* W *di una superficie* S *determinino assieme a questi un gruppo armonico.*

Ciò permette d'interpretare geometricamente il risultato di Fubini sul teorema di permutabilità per le superficie isotermo–asintotiche nel modo seguente:

Se $\bar{S}_1$ *ed* $\bar{S}_2$ *sono superficie isotermo–asintotiche trasformate* W *di una superficie* S *isotermo–asintotica, affinché tutte le* ∞^1 *superficie del teorema di* *permutabilità risultino isotermo–asintotiche occorre e basta che i punti generici* $\overline{x}_1 , \overline{x}_2$ *delle* $\overline{S}_1 , \overline{S}_2$ *dividano armonicamente i punti focali della retta che li congiunge.*

4. Sia S una superficie generica. Il secondo punto focale – che denoteremo con $\overline{x}_{12} = \overline{x}_{21}$ – della congruenza W determinata dalle $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$ e $B = z_1 B_1 + z_2 B_2$, con z_1 , z_2 costanti arbitrarie, è dato da:

$$\overline{x}_{12} = \overline{x}_{21} = z_1 \overline{x}_1 + z_2 \overline{x}_2 .$$

Corrispondentemente si trovino, mediante la dimostrazione del Fubini, le ∞^1 superficie S_{12} del teorema di permutabilità del Bianchi.

Se $\overline{x}_{12}$ coincide con uno dei punti focali della $\overline{x}_1 \overline{x}_2$, per esempio con $\overline{x}_1 + R_1 \overline{x}_2$, allora

$$R_1 = \frac{z_2}{z_1} . \tag{4.1}$$

Allora dalla (3.4) risulta

$$N_1 z_1^2 + z_1 z_2 N_{12} + N_2 z_2^2 = 0 , \tag{4.2}$$

sicché, tenendo conto della (2.1), si ha

$$N = 0 . \tag{4.3}$$

Reciprocamente, se $N = 0$ il punto $\overline{x}_{12} = \overline{x}_{21}$ coincide con uno dei punti focali della retta $\overline{x}_1 \overline{x}_2$. Infatti dalle (3.4), (2) allora segue:

$$RN_2 \left(\frac{z_2}{z_1} - R \right) + N_1 \left(R \frac{z_1}{z_2} - 1 \right) = 0 ; \tag{4.4}$$

e questa condizione è identicamente soddisfatta se $R = z_2/z_1$. Supposto $R \neq z_2/z_1$, dalla (4) si ricava:

$$R = \frac{z_1 N_1}{z_1 N_2} . \tag{4.5}$$

Poiché dalle (3.4), (2) discende la $R_1 + R_2 = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1 N_1}{z_2 N_2}$, così necessariamente una delle R_1 , R_2 risulta uguale a z_2/z_1. Pertanto:

Affinché si abbia $N = 0$, *occorre e basta che il punto* $\overline{x}_{12} = \overline{x}_{21}$ *coincida con un punto focale della retta* $\overline{x}_1 \overline{x}_2$.

Conseguentemente, la congruenza $(x , \overline{x}_{12})$ apparterrà allora ad un complesso lineare speciale.

Se di più $N_{12} = 0$, allora $z_1^2 N_1 + z_2^2 N_2 = 0$ onde la (3.4) porge $R_2 = -R_1 = -\frac{z_2}{z_1}$. Dalla $z_1 S_1 + z_2 S_2 = S$ e dalle (1.5) e (2.1) si ricavano le

$$z_1^2 N_{1u} + z_2^2 N_{2u} = 0 \quad ; \quad A_2 z_1 N_{1u} + A_1 z_2 N_{2u} = 0 \tag{4.6}$$

e le analoghe

$$(4.6')\qquad z_1^2 N_{1v} + z_2^2 N_{2v} = 0 \quad ; \quad z_1 B_2 N_{1v} + z_2 B_1 N_{2v} = 0 .$$

Siccome $A_1 z_1 \neq z_2 A_2$ e $z_2 B_2 \neq z_1 B_1$, necessariamente $N_{1u} = N_{1v} = 0$; $N_{2u} = N_{2v} = 0$. Perciò

$$(4.7)\qquad N_1 = c_1 \quad ; \quad N_2 = c_2 ,$$

onde le congruenze $(x\bar{x}_1)$, $(x\bar{x}_2)$ e $(\bar{x}_1 x_{12})$, $(\bar{x}_2 x_{12})$ appartengono in generale a complessi lineari, sicché:

Le falde focali delle suddette congruenze sono superficie trasformate l'una nell'altra da una correlazione.

Ciò non avrà invece generalmente luogo se $N_{12} \neq 0$.

Abbiamo visto sopra che, per qualsiasi scelta di z_1 e z_2, cioè in relazione a qualsiasi punto $\bar{x}_{12} = \bar{x}_{21} = z_1 \bar{x}_1 + z_2 \bar{x}_2$, si hanno ∞^1 superficie S_{12} determinate dai punti $x_{12} = x_{21}$; ebbene:

Se si vuole che nessuna delle S_{12} *che corrispondono ai punti focali della retta* $\bar{x}_1\bar{x}_2$ *sia trasformata mediante una correlazione delle superficie* $\bar{S}_1$ *e* $\bar{S}_2$, *si deve necessariamente supporre* $N_{12} \neq 0$.

Corrispondentemente, il teorema di permutabilità si potrà formulare così:

Se a partire da una superficie S *se ne costruiscono due trasformate per congruenze* W, $\bar{S}_1$ *e* $\bar{S}_2$, *tali che i loro punti generici non formino un gruppo armonico con i punti focali della loro congiungente, esistono* ∞^1 *superficie* S_{12} *che sono contemporaneamente trasformate asintotiche comuni di* $\bar{S}_1$ *e* $\bar{S}_2$.

In questo caso, il teorema di permutabilità ammette il teorema reciproco che abbiamo dimostrato in [4] e [5] e che si enuncia nel modo seguente:

Se le ∞^1 *superficie* (M^s) *di una famiglia sono trasformate per congruenze* W *di due superficie fisse* (M_0) *e* (M_2), *tali che i punti* M_0 *e* M_2 *non separino armonicamente i fuochi della retta* $M_0 M_2$, *allora tutte le congruenze* $(M^s M_0)$ *e* $(M^s M_2)$ *sono congruenze* W.

5. Nella precedente Nota [6] abbiamo dimostrato il seguente teorema:

Una coppia di congruenze K, K' *stratificabili in un senso è doppiamente stratificabile, ossia è stratificabile, se esistono soltanto due superficie* Σ' (*e non* ∞^1) *i cui piani tangenti nei punti d'intersezione col raggio* K' *passano per il raggio corrispondente di* K.

Per la validità di questo teorema bisogna supporre che i punti del raggio K' che descrivono le due superficie Σ' *non separino armonicamente i fuochi della loro congiungente.*

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. TERRACINI, *Le congruenze* W, « Rend. del Sem. Mat. e Fis. di Milano », *21*, 1–15 (1950).

[2] G. FUBINI, *Relazione tra le due falde focali di una congruenza* W. *Composizione di 2 trasformazioni* W, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (5) *32*, 301–305 (1923).

[3] G. FUBINI e E. CECH, *Geometria proiettiva differenziale*, N. Zanichelli, Bologna 1926.

[3′] E. RAGAZZI, *Sopra una classe di trasformazioni delle superficie isotermo-asintotiche, etc.*, « Rendic. Circ. Mat. Palermo », *45*, 205–210 (1921).

[4] F. MARCUS, *On the converse of Bianchi's permutability theorem*, « Annals of Math. », *49*, 710–713 (1948).

[5] F. MARCUS, *Sopra i risultati di Fubini sull'inversione del teorema di permutabilità di Bianchi*, « Boll. U.M.I. », *13*, 189–195 (1958).

[6] F. MARCUS, *Sur la définition des couples des congruences de droites stratifiables*, « Bull. de la Soc. Roy. des Sci. de Liège », 96–99 (1949).