Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Heinrich Guggenheimer

Alcune conseguenze di un teorema di Fenchel

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.3-4, p. 157–159.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_3-4_157_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Geometria. — *Alcune conseguenze di un teorema di Fenchel.* Nota (*) di HEINRICH GUGGENHEIMER, presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — "As an application of Fenchel's theorem, we show that (*a*) a closed geodesic on a regular surface whose Gauss image is of length $< 2\pi$ must somewhere have an asymptotic and somewhere a principal direction, and (*b*) the polar reciprocal of any closed space curve whose central projection on a unit sphere is a regular curve without inflections for which the integral of the geodesic curvature is of absolute value $< 2\pi$ must have singular points".

Nei suoi studi recenti sulle proprietà tangenziali delle curve chiuse sghembe, Beniamino Segre ha fra l'altro mostrato l'importanza del teorema di Fenchel più oltre citato. Nella presente Nota diamo due applicazioni dello stesso teorema in un altro indirizzo. Il nostro secondo risultato (metrico), ammette – come vedremo – una trasformazione proiettiva seguendo la tecnica usata dal Segre.

1. Sia $x(s)$ una curva regolare situata sopra una superficie regolare Σ dello spazio cartesiano reale R^3. La superficie Σ non è supposta completa. Si indica con s la lunghezza d'arco, con t il vettore tangente unitario di $x(s)$, con N la normale unitaria di Σ nel punto $x(s)$ e con $T = N \times t$ la tangente normale (normale a t e tangente alla superficie). Le equazioni di Frenet del triedro mobile (t, T, N) sono

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t \\ T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & t_r \\ -k_n & -t_r & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ T \\ N \end{pmatrix}.$$

La funzione k_g è la curvatura geodetica e k_n, t_r sono, rispettivamente, curvatura normale e torsione relativa (o geodetica).

Le linee geodetiche sono definite dall'essere in ogni loro punto $k_g = 0$. Se $x(s)$ è una curva geodetica chiusa e se la direzione di t non è mai asintotica, allora la curva sferica $N(s)$ (l'immagine di $x(s)$ nell'applicazione di Gauss $x \rightarrow N(x)$ di Σ nella sfera unitaria S^2) è l'indicatrice tangenziale $t(s)$. Secondo il teorema di Fenchel, $N(s)$ sega ogni cerchio massimo della sfera ed è di lunghezza $\geq 2\pi$.

Si ottiene un risultato simile per le geodetiche mai tangenti ad una linea di curvatura della superficie $(t_r(s) \neq 0)$.

Per contrapposizione, da tali risultati segue il

TEOREMA: *Se l'immagine di Gauss di una linea geodetica chiusa sopra una superficie regolare orientabile è di lunghezza* $< 2\pi$, *allora la geodetica è tangente in*

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1969.

qualche punto ad una linea asintotica della superficie ed è tangente in qualche punto ad una linea di curvatura. Le indicatrici delle tangenti e delle tangenti normali della geodetica hanno ognuna almeno due singolarità cuspidali.

È noto dal teorema di Hadamard che l'immagine di Gauss di una geodetica chiusa semplice sopra una superficie di curvatura totale positiva divide la superficie della sfera in due parti di aree uguali e, perciò, è di lunghezza $\geq 2\pi$. Il nostro teorema non necessita nessuna ipotesi di carattere topologico. Da esso si trae subito il

COROLLARIO: *L'immagine di Gauss di una geodetica chiusa sopra una superficie di curvatura totale positiva (non necessariamente convessa) è di lunghezza* $\geq 2\pi$.

Le condizioni del teorema non sono necessarie. Ad esempio, il cerchio minimo dell'iperboloide di rotazione ad una falda è in pari tempo geodetico e linea di curvatura; la sua immagine di Gauss è un cerchio massimo.

La curvatura geodetica dell'indicatrice tangenziale $t(s)$ sulla sfera unitaria è $\gamma(s) = t_r/k_n$. Ne segue che l'immagine di Gauss di una geodetica la cui indicatrice tangenziale sia una curva sferica a curvatura geodetica dappertutto positiva è di lunghezza $\geq 2\pi$.

2. Sia $c(\sigma)$ una curva regolare chiusa sulla sfera unitaria, σ la sua lunghezza d'arco e t, T, rispettivamente, i vettori unitari tangente e tangente normale. La curvatura geodetica di $c(\sigma)$ si denoti con $\gamma(\sigma)$. Ogni curva chiusa

$$x(\sigma) = r(\sigma)\, c(\sigma) \qquad (r(\sigma) > 0\,, r \in c^3)\,,$$

possiede $c(\sigma)$ come proiezione centrale sulla sfera. La polare reciproca di $x(\sigma)$ rispetto alla sfera unitaria è

$$y(\sigma) = \rho c + \dot{\rho} t + \frac{1}{\gamma}(\rho + \ddot{\rho})\,\mathrm{T}\,,$$

dove $\rho = r^{-1}$ ed il puntino denota differenziazione rispetto al parametro σ. La curva $y(\sigma)$ esiste ed è continua nello spazio euclideo se $\gamma(\sigma)$ è dappertutto non nulla. In questo caso

$$\dot{y} = \mu \mathrm{T}$$

ove

$$\mu = \gamma\dot{\rho} + \left(\frac{\rho + \ddot{\rho}}{\gamma}\right)^{\cdot}.$$

La $y(\sigma)$ è regolare se $\mu(\sigma) \neq 0$ dappertutto. (Questo non può mai accadere se $r(\sigma) = 1$, in quanto ciò implica

$$\oint \mu \, d\sigma = 0\,.$$

La polare reciproca di una curva sferica non è mai non singolare e, com'è ben noto, le singolarità corrispondono agli estremi della curvatura).

Se la condizione $\mu(\sigma) \neq 0$ è sempre soddisfatta, il teorema di Fenchel implica che il perimetro $\oint \gamma \, d\sigma$ della curva chiusa sferica $T(\sigma)$ è $\geq 2\pi$. Si ha pertanto il

TEOREMA: *Se l'integrale della curvatura geodetica di una curva sferica chiusa, regolare, di curvatura geodetica positiva, è* $< 2\pi$, *allora la reciproca nella polarità rispetto alla sfera di ogni curva* $r(\sigma)\, c(\sigma)$ *ha necessariamente dei punti singolari.*

Il teorema ammette una forma proiettiva. Sia $c(\sigma)$ una curva chiusa e regolare tracciata su di un ellissoide Q. Per ogni valore σ, $T(\sigma)$ sia un punto di Q tale che la direzione dal centro O a $T(\sigma)$ risulti coniugata alla direzione di $dc/d\sigma$ rispetto alla conica segata da Q sul piano centrale parallelo al piano tangente di Q nel punto $c(\sigma)$; l'orientazione di $\overrightarrow{OT}$ è ottenuta per continuità (nello spazio proiettivo P^3) da quella di $\overrightarrow{OT}(0)$.

Se la curva $T(\sigma)$ non sega ogni sezione piano–centrale di Q, allora la reciproca nella polarità di Q di ogni curva chiusa $r(\sigma)\, c(\sigma)$ è dotata di singolarità.

Notiamo che ogni curva chiusa sferica di curvatura geodetica non nulla è l'indicatrice delle tangenti normali di una curva chiusa sferica; infatti c è la tangente normale di T.