Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sorin Gogonea

Sur le problème de Dirichlet à singularités données pour le plan muni de coupures rectilignes alignées

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.3-4, p. 151–156.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_3-4_151_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Analisi matematica. — *Sur le problème de Dirichlet à singularités données pour le plan muni de coupures rectilignes alignées.* Nota (*) di SORIN GOGONEA, presentata dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — In questa Nota si risolve il problema di Dirichlet per il caso di piano tagliato lungo alcuni segmenti disposti su una medesima retta, supponendo che la funzione cercata abbia nel suo campo di definizione delle singolarità isolate. Il problema è ridotto a due problemi di Riemann con singolarità per il caso dei contorni aperti che abbiamo risolto in [1].

1. Dans une Note précédente [1], nous avons résolu le problème de Riemann à singularités données pour le cas des contours ouverts par une méthode qui permet de séparer la solution en deux parties bien distinctes, de sorte que la présence des singularités se manifeste seulement dans la solution générale du problème homogène. Les résultats obténus sont susceptibles d'être appliqués à la résolution de certains problèmes aux limites à singularités données pour le plan muni de coupures. Dans ce qui suit nous nous occupons du problème de Dirichlet.

2. Soit dans le plan complexe $z = x + iy$ les segments $L_j : \overline{A_j B_j}$ situés sur l'axe Ox, leurs extremités A_j et B_j ayant respectivement les abscisses a_j et b_j, $(j = 1, 2, \cdots, p)$, tel que $a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_p < b_p$. Soit E l'ensemble de ces extremités, leurs abscisses considérées dans un ordre arbitraire étant notées parfois par c_k $(k = 1, 2, \cdots, 2p)$. Désignons par $\mathfrak{D}$ le domaine multiplement connexe dont la frontière L est la réunion des coupures pratiquées sur L_j. Les côtés supérieurs des coupures (vers $y > 0$) et ceux inférieurs seront notés respectivement par L_j^+ et L_j^-, et soit $L^+ = \bigcup_{j=1}^{p} L_j^+$ et $L^- = \bigcup_{j=1}^{p} L_j^-$.

Le problème de la détermination d'une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$ connaissant les valeurs limites de sa partie réelle sur L, a été étudié par plusieurs auteurs en suivant des voies différentes. Un procédé fondé sur la construction directe de la fonction de Green du domaine a été développé par H. Hornich [2]. La réduction du problème de Dirichlet à deux problèmes de Riemann a été faite par N. I. Mouskhélichvili [3]. Son procédé a permis la division des solutions en classes par rapport à leurs comportement au voisinage des extremités et l'établissement des conditions d'éxistence des solutions uniformes appartenant à ces classes. De la sorte ont été précisés et généralisés des résultats plus anciens dûs à M.V. Keldich et L. I. Sédov [4]. En utilisant ces résultats obtenus dans un problème plus général, C. Jacob [5], a développé une méthode de résolution qui a permis en même temps une étude detaillé des multiformités de la solution (voir également [6]).

(*) Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1969.

3. Le but de notre Note est celui de généraliser pour les solutions à singularités données les résultats de [3]. Nous formulerons le problème de la façon suivante: $F_0(z)$ étant une fonction uniforme définie dans tout le plan à l'exception de l'ensemble S de ses singularités isolées qui se trouvent en $\mathfrak{D}$ à une distance finie, déterminer une fonction $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ dans $\mathfrak{D}$ telle que:

a) La différence

$$\mathfrak{F}(z) = F(z) - F_0(z) \tag{1}$$

est holomorphe en chaque point de $\mathfrak{D}$ y inclus le point à l'infini.

b) $F(z)$ soit continûment prolongéable sur $L - E$ et dans le voisinage des points de E

$$|F(z)| < \frac{C^{te}}{|z - c_k|^{\alpha}}, \qquad \alpha \in (0, 1). \tag{2}$$

c) Les valeurs limites de $U(x, y)$ sur L doivent remplir les conditions

$$\begin{cases} U^+(x, 0) = f^+(x), & x \in L^+, \\ U^-(x, 0) = f^-(x), & x \in L^-, \end{cases} \tag{3}$$

où $f^+(x)$ et $f^-(x)$ sont des fonctions höldériennes données sur $L_1 + L_2 + \cdots + L_p$.

Représentons $F(z)$ sous la forme d'une somme, [3],

$$F(z) = \Phi(z) + \Omega(z) \tag{4}$$

où

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}[F(z) + \overline{F(\bar{z})}] \quad \text{et} \quad \Omega(z) = \frac{1}{2}[F(z) - \overline{F(\bar{z})}]. \tag{5}$$

Les fonctions $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ sont définies et analytiques en $\mathfrak{D}$ ayant des singularités dans les point de $S \cup \tilde{S}$, où $\tilde{S}$ est l'ensemble des points symétriques à S par rapport à l'axe Ox. Si nous posons

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2}[F_0(z) + \overline{F_0(\bar{z})}] \quad \text{et} \quad \Omega_0(z) = \frac{1}{2}[F_0(z) - \overline{F_0(\bar{z})}], \tag{6}$$

il est évident que les différences $\Phi(z) - \Phi_0(z)$ et $\Omega(z) - \Omega_0(z)$ sont holomorphes et que l'on a

$$\overline{\Phi_0(\bar{z})} = \Phi_0(z) \quad \text{et} \quad \overline{\Omega_0(\bar{z})} = -\Omega_0(z). \tag{7}$$

Ceci implique, compte tenu de (1) et (5) qu'on a nécessairement

$$\overline{\Phi(\bar{z})} = \Phi(z) \quad \text{et} \quad \overline{\Omega(\bar{z})} = -\Omega(z). \tag{8}$$

Alors si l'on fait que $z \to x \in L^+$ (donc $\bar{z} \to x \in L^-$) on obtient comme dans le cas sans singularités que

$$\Phi^+(x) = -\Phi^-(x) + f^+(x) + f^-(x), \tag{9}$$

$$\Omega^+(x) = \Omega^-(x) + f^+(x) - f^-(x), \tag{10}$$

en désignant par $\Phi^+(x)$ et $\Phi^-(x)$ ($\Omega^+(x)$ et $\Omega^-(x)$) les valeurs limites de $\Phi(z)$ ($\Omega(z)$) sur L^+ respectivement sur L^-.

4. On aboutit de la sorte à deux problèmes de Riemann à singularités données pour les contours ouverts L_j. Le premier peut être énoncé de la façon suivante: déterminer la fonction $\Phi(z)$ dans $\mathfrak{D}$ telle que:

a') La différence,

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi(z) - \Phi_0(z) \tag{11}$$

est holomorphe partout en $\mathfrak{D}$.

b') $\Phi(z)$ soit continûment prolongéable sur $L - E$ et dans le voisinage des points de E soit remplie une condition de type (2).

c') $$\Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}.$$

d') Les valeurs limites sur L^+ et L^- doivent satisfaire la condition (9).

Si l'on néglige pour l'instant la condition *c'*) on peut utiliser la solution obtenue dans [1]. Soit $X(z)$ la solution canonique du problème de Riemann (9) homogène, sans singularités, de classe $h(c_1, c_2, \cdots, c_r)$ et ayant l'indice $\varkappa$, [3]. Soit ensuite $M(z)$ la somme des parties principales de la fonction $\Phi_0(z)/X(z)$ relatif à toutes les singularités, et posons

$$\frac{\Phi_0(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\,X(z)}\left[F_0(z) + \overline{F_0(\bar{z})}\right] = M(z) + H(z), \tag{12}$$

$H(z)$ étant donc holomorphe. Alors la formule (10) de [1] nous donne

$$\Phi(z) = X(z)\left[M(z) + P_\varkappa(z)\right] + \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{g(x)}{X^+(x)}\,\frac{dx}{x - z}, \tag{13}$$

où $g(x) = f^+(x) + f^-(x)$ et $P_\varkappa(x)$ est un polynôme arbitraire de degré $\varkappa$ si $\varkappa \geq 0$ et qui est égal a une constante si $\varkappa < 0$, le sens d'intégration sur chaque L_j^+ étant celui de A_j à B_j.

Dans notre cas on voit aisément que, [3],

$$X(z) = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{14}$$

où

$$R_1(z) = \prod_{k=1}^{r} (z - c_k) \quad ; \quad R_2(z) = \prod_{k=r+1}^{2p} (z - c_k). \tag{15}$$

Le radical (14) est considéré holomorphe dans le plan muni des coupures L, en choisissant par exemple la détermination qui est réelle et positive pour $z = x > b_p$ et qui doit être suivie par continuité. On a donc dans le voisinage de $z = \infty$

$$X(z) = z^{r-p} + d_1 z^{r-p-1} + \cdots \tag{16}$$

ce qui fait voir que $\varkappa = p - r$.

De (13) résulte ensuite

$$\overline{\Phi(\bar{z})} = \overline{X(\bar{z})}\,[\overline{M(\bar{z})} + \overline{P_\varkappa(\bar{z})}] - \frac{\overline{X(\bar{z})}}{2\pi i} \cdot \int_{L^+} \frac{g(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{x-z} . \tag{17}$$

De (14) il résulte que $\overline{X(\bar{z})} = X(z)$. Ensuite il est facile de voir, en utilisant (7) et (12) que $\overline{M(\bar{z})} = M(z)$, et compte tenu que le dernier terme de (17) est égal au dernier terme de (13), [3], il résulte que $\Phi(z)$ satisfait la condition c') si et seulement si les coefficients de $P_\varkappa(z)$ sont réels.

5. La détermination de $\Omega(z)$ conduit au même problème énoncé au début du N. 4 à cela près qu'on remplace la condition c') par

$$\overline{\Omega(\bar{z})} = -\Omega(z), \tag{18}$$

la condition aux limites (9) par (10), et $\Phi_0(z)$ par $\Omega_0(z)$.

Dans ce cas la solution canonique du problème (10) homogène sans singularités est $X_*(z) = 1$, [3]. Si nous notons par $M_*(x)$ la somme des parties principales de $\Omega_0(z)/X_*(z)$ relatif à toutes les singularités et si nous posons

$$\frac{\Omega_0(z)}{X_*(z)} = \frac{1}{2}\,[F_0(z) - \overline{F_0(\bar{z})}] = M_*(z) + H_*(z) \tag{19}$$

$H_*(z)$ étant holomorphe, la formule (10) de [1] nous donne

$$\Omega(z) = M_*(z) + K_* + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{g_*(x)}{x-z}\, dx, \tag{20}$$

où $g_*(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et K_* est une constante arbitraire.

En calculant $\overline{\Omega(\bar{z})}$ et en tenant compte de la relation $\overline{M_*(\bar{z})} = -M_*(z)$, facile à prouver, il résulte que $\overline{\Omega(\bar{z})} = -\Omega(z)$ si et seulement si K_* est pure imaginaire. Alors de (4), (13) et (20) on obtient la solution du problème pour $F(z)$ sous la forme

$$\begin{aligned} F(z) = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} \left[M(z) + P_{p-r}(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \sqrt{\frac{R_2(x)}{R_1(x)}}\, \frac{f^+(x) + f^-(x)}{x-z}\, dx \right] + \\ + M_*(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} [f^+(x) - f^-(x)]\, \frac{dx}{x-z} + iC, \end{aligned} \tag{21}$$

où $P_{p-r}(z)$ est un polynôme à coefficients réels qui se réduit à une constante si $p - r < 0$ et C est une constante réelle.

Si $F_0(z) \equiv 0$ on retrouve la solution obtenue dans [3]. Si l'on prend $r = 2p$ et $F_0(z) \equiv 0$ on retrouve de même la solution de [6] dans le cas où $V(x, y)$ est supposée uniforme. Remarquons également que dans (21) les termes contenant les singularités sont completement séparés du reste de la solution et que leurs déterminations n'exige pas des quadratures supplémentaires.

6. Prouvons maintenant que la solution (21) satisfait à toutes les condition imposées. Puisqu'elle diffère de la solution de [3] seulement par la somme $\sqrt{R_1(z)/R_2(z)} \cdot M(z) + M_*(z)$, $M(z)$ et $M_*(z)$ étant continues au voisinage de tous les points de L, il s'ensuit que les conditions de *b*) sont remplies. Il résulte de plus que la solution est presque bornée au voisinage des points $c_1, c_2, \cdots, c_r$ ([3]). Ensuite $M_*(z) = -\overline{M_*(\bar{z})}$ implique que la partie réelle de $M_*(z)$ est nulle pour z réel. Compte tenu de la détermination choisie pour le radical (14) et du fait que $M(z) = \overline{M(\bar{z})}$, il résulte de même que la partie rèelle de $\sqrt{R_1(z)/R_2(z)} \cdot M(z)$ est nulle pour $z = x \in L$. Vu que le reste des termes de (21) satisfont les conditions (3), [3], il s'ensuit que ces conditions sont remplies par la solution (21) même.

Calculons enfin la différence $\mathfrak{F}(z)$. Vu que $F_0(z) = \Phi_0(z) + \Omega_0(z)$ de (12), (19) et (21) on obtient

$$F(z) - F_0(z) = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} \Bigg[-H(z) + P_{p-r}(z) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \sqrt{\frac{R_2(x)}{R_1(x)}} \, \frac{f^+(x) + f^-(x)}{x - z} \, dx \Bigg] - H_*(z) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} [f^+(x) - f^-(x)] \frac{dx}{x - z} + iC. \tag{22}$$

Supposons que $p - r \geq 0$. Alors compte tenu de (16) il résulte que $\mathfrak{F}(z)$ est holomorphe et donc $F(z)$ possède seulement les singularités désirées. Par contre, si $p - r < 0$ alors $\sqrt{R_1(z)/R_2(z)}$ a un pôle d'ordre $r - p$ à l'infini et donc $F(z)$ elle même possède cette singularité supplémentaire parce que maintenant $P_{p-r}(z) = K$, K étant une constante réelle. Afin qu'elle disparaisse il faut et il suffit que la parenthèse qui multiplie $\sqrt{R_1(z)/R_2(z)}$ ait à l'infini un zéro de multiplicité $r - p$. Soit qu'au voisinage de $z = \infty$ on a le developpement

$$M(z) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2(z)}{R_1(z)}} [F_0(z) + \overline{F_0(\bar{z})}] + K = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^{-j}. \tag{23}$$

Alors la solution (21) possède seulement les singularités désirées si et seulement si

$$\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_s - \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{L^+} \sqrt{\frac{R_2(x)}{R_1(x)}} [f^+(x) + f^-(x)] \, x^{s-1} \, dx = 0, \\ \qquad\qquad\qquad s = 1, 2, \cdots, r - p - 1. \end{cases} \tag{24}$$

La condition $\beta_0 = 0$ peut être toujours remplie, compte tenu de (23), en prenant $K = 0$. Soit que les autres conditions (24) sont de même remplies et supposons qu'il existe deux solutions $F_1(z)$ et $F_2(z)$ satisfaisant à toutes les conditions imposées. Alors $F_1(z) - F_2(z)$ sera une solution holomorphe satisfaisant les conditions (3) avec $f^+(x) = f^-(x) = 0$ et de (21) il s'ensuit que $F_1(z) - F_2(z) = iC$.

Dans un autre travail nous allons appliquer les méthodes contenues dans cette Note à un certain problème mixte à singularités données pour le plan muni de coupures.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. GOGONEA, « Rendiconti dei Lincei », *46*, 5, 526–529 (1969).
[2] H. HORNICH, « Rendiconti dei Lincei », *3*, 63–67 (1947).
[3] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equations*, Groningen 1953.
[4] N. V. KELDYCH et L. I. SEDOV, « Doklady Acad. Nauk SSSR », *16*, 1, 7–10 (1937).
[5] C. JACOB, « Comptes Rendus Acad. Sci. Paris », *t. 228*, 355–357 (1949).
[6] C. JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest, Paris 1959.