Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Adelaide Sneider Ludovici

Sul cerchio minimo contenente tutti gli autovalori di un operatore integrale di Fredholm con nucleo in L^2

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.3-4, p. 145–150.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_3-4_145_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Analisi matematica. — *Sul cerchio minimo contenente tutti gli autovalori di un operatore integrale di Fredholm con nucleo in* L^2. Nota [(*)] di MARIA ADELAIDE SNEIDER LUDOVICI, presentata dal Corrisp. G. FICHERA.

SUMMARY. — A Fredholm integral operator T with an L^2–kernel $K(x, y)$ is considered. It is shown that the area $\sigma(K)$ of the smallest disk containing all the eigenvalues of T does not exceed $2^{-1}\pi \| K(x, y) \|^2$. That is the best obtainable estimate for $\sigma(K)$.

Sia definita, nel quadrato: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, la funzione misurabile a valori complessi: $K(x, y)$ e sia

$$0 < \int_0^1 \int_0^1 | K(x, y) |^2 \, dx \, dy < +\infty . \tag{1}$$

Si consideri l'equazione integrale omogenea:

$$\int_0^1 K(x, y) \, u(y) \, dy = \lambda u(x). \tag{2}$$

È classicamente noto che essa ammette un insieme discreto (cioè vuoto, finito o numerabile) di autovalori, che indicheremo con Λ. Tale insieme è costituito da punti del piano complesso ed esso, se non è vuoto, o consta di un numero finito di punti, o è un insieme limitato avente lo zero come unico punto di accumulazione.

Indico con $\sigma(K)$ l'area del cerchio minimo contenente Λ [(1)], convenendo di assumere $\sigma(K) = 0$ se Λ è vuoto o consta di un solo punto.

Mi propongo di dimostrare il seguente:

TEOREMA: *Considerato il funzionale*

$$\frac{\sigma(K)}{\int_0^1 \int_0^1 | K(x, y) |^2 \, dx \, dy},$$

esso è dotato di massimo nella classe di tutte le funzioni misurabili $K(x, y)$ *verificanti la* (1) *e riesce*:

$$\max \frac{\sigma(K)}{\int_0^1 \int_0^1 | K(x, y) |^2 \, dx \, dy} = \frac{\pi}{2} .$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 giugno 1969.

(1) Darò, fra poco, la definizione precisa di cerchio minimo contenente un insieme limitato.

Tale risultato è da riguardarsi come una estensione, agli operatori integrali di Fredholm, di uno analogo, stabilito recentemente da R.A. Smith e L. Mirsky [2] (2), per le matrici complesse $n \times n$.

È opportuno premettere una definizione e taluni lemmi alla dimostrazione del teorema enunciato.

Se E è un qualsiasi insieme, non vuoto e limitato, del piano della variabile complessa z, dirò *cerchio minimo contenente* E l'insieme C di punti z del piano verificante le seguenti condizioni:

1) esistono un punto z_0 del piano ed un numero non negativo r tali che i punti di C sono tutti e soli quelli per i quali: $|z - z_0| \leq r$;

2) il numero r è l'estremo inferiore dei raggi dei domini circolari (3) contenenti E;

3) C contiene tutti i punti di E.

LEMMA 1: *Dato comunque nel piano l'insieme* E *non vuoto e limitato, esiste uno, ed uno solo, cerchio minimo contenente* E.

Si indichi con $\{D\}_E$ la classe di tutti i domini circolari D del piano verificanti le seguenti condizioni: I) D contiene E; II) *raggio* D $\leq$ *diametro* E (4).

Pongo:

$$r = \inf_{D \in \{D\}_E} \textit{raggio } D.$$

È evidente che r è l'estremo inferiore dei raggi dei domini circolari contenenti E.

Sia $\{D_k\}$ una successione di domini di $\{D\}_E$, tale che, posto: raggio $D_k = r_k$, sia $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = r$.

Indico con z_k il centro di D_k. Sia $\tilde{z}$ un qualsiasi fissato punto di E. Posto $\delta =$ *diametro* E, si ha: $|\tilde{z} - z_k| \leq r_k \leq \delta$. Pertanto la successione $\{z_k\}$ è limitata. Da essa può estrarsi una successione convergente, che, per semplicità, seguitiamo a chiamare $\{z_k\}$. Sia $z_0 = \lim\limits_{k \to \infty} z_k$. Sia C l'insieme dei punti definiti dalla condizione: $|z - z_0| \leq r$. Dico che C è il cerchio minimo contenente E. Poiché C verifica le condizioni 1) e 2), che definiscono il cerchio minimo contenente E, basta solo far vedere che ogni punto di E è contenuto in C.

Sia, per assurdo, $\zeta \in E$ e $|\zeta - z_0| = r + \eta$ con $\eta > 0$. Può scegliersi k tale che

$$|z_k - z_0| < \frac{1}{3}\eta \quad , \quad r_k - r < \frac{1}{3}\eta .$$

Si ha allora:

$$r_k \geq |\zeta - z_k| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - z_k| > r + \eta - \frac{1}{3}\eta$$

(2) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine di questa Nota.

(3) Dicesi *dominio circolare* del piano l'insieme di tutti i punti z del piano verificanti una condizione del tipo seguente: $|z - \zeta_0| \leq \rho$, essendo ζ_0 un punto fissato del piano (*centro del dominio circolare*) e ρ un numero positivo (*raggio del dominio circolare*).

(4) Dicesi *diametro di* E il numero $\delta = \sup |z - \zeta|$, l'estremo superiore di $|z - \zeta|$ essendo considerato al variare comunque di z e ζ in E.

e, quindi, l'assurdo:

$$r_k - r > \frac{2}{3}\eta .$$

Si è, così, provata l'esistenza del cerchio minimo C contenente E.

Per dimostrare l'unicità di C si ragioni per assurdo. Si supponga che esista un altro cerchio minimo, C′, contenente E. Riesce, allora, $C \cap C' \supset E$. Si può, quindi, determinare un altro cerchio, C″, avente raggio inferiore a quello di C e di C′ e tale che $C'' \supset C \cap C' \supset E$. Ciò è assurdo poiché C e C′ verificano, per ipotesi, la condizione 2).

Il lemma è, così, completamente dimostrato.

Seguendo [2] considero, ora, i due seguenti lemmi:

LEMMA 2: *Sia* E *costituito dai punti distinti* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ $(n > 1)$. *Sia* C *il cerchio minimo contenente* E. *Si presenta uno, almeno, dei seguenti due casi*: 1) *due dei punti* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *sono le estremità di un diametro di* C; 2) *tre fra i punti* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *stanno sulla frontiera di* C *e sono i vertici di un triangolo acutangolo.*

La dimostrazione di questo lemma è, solo in parte, data in [1]. Ritengo, quindi, opportuno fornire una dimostrazione completa. Userò, nella prima parte di essa, gli stessi ragionamenti contenuti in [1].

Si osservi che l'intersezione di E con $\mathfrak{F}C$ non può essere vuota, poiché, in tale caso, si potrebbe trovare un cerchio, di raggio inferiore a quello di C, contenente l'insieme E.

Si osservi, anche, che non può accadere che l'insieme $E \cap \mathfrak{F}C$ sia tutto interno ad un semipiano, la cui retta origine passi per il centro z_0 del cerchio C; infatti, se così fosse, con una opportuna traslazione ortogonale a tale retta, ci si potrebbe ricondurre al caso in cui $E \cap \mathfrak{F}C = \varnothing$. Ne segue che, se $E \cap \mathfrak{F}C$ consta di s punti distinti, deve essere $s \geq 2$.

Se riesce $s = 2$, i due punti sono diametrali; infatti, se non lo fossero, essi sarebbero interni ad un semipiano, la cui retta origine passa per z_0.

Considero il caso nel quale non esistono due punti diametrali; deve, allora, essere $s \geq 3$. Indico con Γ l'unione di tutti i domini triangolari aventi per vertici tre qualsiansi fra i punti di $E \cap \mathfrak{F}C$. L'insieme, che così ottengo, è, ovviamente, un insieme convesso. Sia z_0 esterno a Γ; allora, per una nota proprietà degli insiemi convessi, esisterebbe una retta, passante per z_0, tale che Γ e, quindi, $E \cap \mathfrak{F}C$ siano interni ad uno dei semipiani aventi tale retta come origine. Ciò è assurdo. Deve, dunque, essere $z_0 \in \Gamma$, cioè z_0 deve essere contenuto in un dominio triangolare T, avente i vertici in $E \cap \mathfrak{F}C$. D'altra parte z_0 non può essere sulla frontiera di T, poiché, allora, esisterebbero due punti di $E \cap \mathfrak{F}C$ diametrali. Se ne deduce che z_0 è interno a T. Pertanto T è un triangolo acutangolo. Il lemma riesce, così, completamente provato.

LEMMA 3: *Siano* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *i vertici di un triangolo acutangolo. Sia* ζ *il baricentro di tale triangolo e* r *il raggio del cerchio ad esso circoscritto. Si ha*:

$$|\lambda_1 - \zeta|^2 + |\lambda_2 - \zeta|^2 + |\lambda_3 - \zeta|^2 > \frac{8}{3} r^2 .$$

Senza ledere la generalità, posso supporre che sia $\lambda_1 = -1 + i0$, $\lambda_2 = 1 + i0$, $\lambda_3 = \xi + i\eta$. Si ha allora:

$$\frac{8}{3} \frac{r^2}{|\lambda_1 - \zeta|^2 + |\lambda_2 - \zeta|^2 + |\lambda_3 - \zeta|^2} = \frac{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + 4\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 3)\eta^2}.$$

Si constata elementarmente che nella regione R del piano $\xi\eta$, definita da $-1 < \xi < 1$, $\xi^2 + \eta^2 > 1$, si ha:

$$\sup \frac{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + 4\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2 + 3)\eta^2} = 1$$

e che in R la funzione considerata è sprovvista di massimo. Segue da ciò la tesi del lemma.

LEMMA 4: (di R.A. Smith e L. Mirsky [2]): *Siano* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *n punti del piano* ($n \geq 2$) *e sia r il raggio del cerchio minimo* C *contenente l'insieme* E *da essi costituito. Si ha*:

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \geq 2r^2. \tag{3}$$

Sia $\zeta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ il baricentro degli n punti $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Poiché la funzione di z: $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - z|^2$ raggiunge il suo minimo assoluto per $z = \zeta$, avremo:

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \zeta|^2.$$

Suppongo (cfr. lemma 2) che sulla frontiera di C vi siano due punti di E – siano essi λ_1 e λ_2 – estremità di un diametro di C. Sarà allora:

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \geq |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 \geq \left|\lambda_1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right|^2 + \left|\lambda_2 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right|^2 = 2r^2.$$

Suppongo, ora, che sulla frontiera di C vi siano tre punti di E – siano λ_1, λ_2, λ_3 – vertici di un triangolo acutangolo (cfr. lemma 2); per il lemma 3 riuscirà allora:

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \geq |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + |\lambda_3|^2 \geq \sum_{s=1}^{3} \left|\lambda_s - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3}\right| > \frac{8}{3} r^2 > 2r^2.$$

Il lemma 4 è, così, completamente dimostrato.

Si può, ora, estendere agli operatori integrali la dimostrazione data da Smith e Mirsky per le matrici e provare il teorema enunciato all'inizio della presente Nota.

Si ordinino, con un qualsivoglia criterio, tutti gli autovalori non nulli della (2), supposti esistenti; siano essi: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \cdots$, con $\lambda_h \neq \lambda_k$ se $h \neq k$. Sia μ_k la molteplicità algebrica di λ_k (5). Sussiste il classico teorema di Schur,

(5) Cfr. [3] p. 336.

espresso dalla seguente disuguaglianza:

$$\sum_k \mu_k |\lambda_k|^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dx\, dy \text{ (6)}. \tag{4}$$

Se gli autovalori non nulli della (2) sono in numero finito: $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, detto r il raggio del cerchio minimo contenente Λ, si avrà, per il lemma 4, $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \geq 2r^2$ e, quindi, per la (4)

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dx\, dy \geq 2r^2, \tag{5}$$

cioè

$$\frac{\sigma(K)}{\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dx\, dy} \leq \frac{1}{2}\pi. \tag{6}$$

Si supponga, ora, che gli autovalori non nulli della (2) costituiscano una successione infinita: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$

Sia Λ_n l'insieme costituito da $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ e r_n il raggio del cerchio minimo C_n, che contiene Λ_n. Sarà, ovviamente, $r_n \leq r_{n+1}$. Poiché, d'altra parte, $\{r_n\}$ è una successione limitata, si avrà:

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \sup r_n = r.$$

Dico che r è il raggio del cerchio minimo C, che contiene Λ. Sia, infatti, $\tilde{r}$ il raggio di C. Non può essere $r > \tilde{r}$ perché, allora, definitivamente sarebbe $r_n > \tilde{r}$ e si avrebbe un assurdo, essendo Λ_n contenuto in C. Non può essere $r < \tilde{r}$. Infatti, fissato ε tale che $0 < \varepsilon < \frac{\tilde{r} - r}{4}$, per $n \geq n_\varepsilon$ sarebbe $|\lambda_n| < \varepsilon$ e, quindi, detto z_ε il centro di C_{n_ε}, si avrebbe per $n \leq n_\varepsilon$

$$|\lambda_n - z_\varepsilon| \leq r_{n_\varepsilon} \leq r < \frac{\tilde{r} - r}{2} + r$$

e per $n \geq n_\varepsilon$

$$|\lambda_n - z_\varepsilon| \leq |\lambda_n - \lambda_{n_\varepsilon}| + |\lambda_{n_\varepsilon} - z_\varepsilon| \leq 2\varepsilon + r_{n_\varepsilon} < \frac{\tilde{r} - r}{2} + r.$$

Ne verrebbe un assurdo, dato che Λ riuscirebbe contenuto nel cerchio di centro z_ε e raggio $\frac{\tilde{r} - r}{2} + r < \tilde{r}$.

Resta, così, provato che $r = \textit{raggio}\ C = \lim_{n \to \infty} r_n$. Si ha, d'altra parte (cfr. lemma 4);

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \geq 2r_n^2$$

(6) Cfr. [3] pp. 353–355 e p. 491.

e, quindi, per la (4)

$$\int_0^1 \int_0^1 | K(x, y) |^2 \, dx \, dy \geq 2 r_n^2 ,$$

dalla quale – per $n \to \infty$ – segue la (5), cioè la (6).

Per completare la dimostrazione del teorema basta, ora, osservare, soltanto che nella (5) sussiste il segno di uguaglianza assumendo

$$K(x, y) = 2 (\sin \pi x \sin \pi y - \sin 2 \pi x \sin 2 \pi y) .$$

Infatti, in tale caso, la (2) ha come unici autovalori: $-1, 0, 1$; riesce, allora, $\sigma(K) = \pi$, mentre è, d'altra parte,

$$\int_0^1 \int_0^1 | K(x, y) |^2 \, dx \, dy = 2 .$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] H. W. E. JUNG, *Über den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschliesst*, « J. Reine Angew. Math. », *137*, 310–313 (1910).

[2] R. A. SMITH e L. MIRSKY, *The Areal Spread of Matrices*, « Linear Algebra and Its Applications », *2*, 127–129 (1969).

[3] A. C. ZAANEN, *Linear Analysis*, North-Holland Publishing Co. 1953.