
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIA GIOVANNA PLATONE GARRONI

**Una generalizzazione dell'identità di Picone a
operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti
discontinui**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 47 (1969), n.3-4, p.
133–138.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_3-4_133_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1969 (Settembre-Ottobre)

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Una generalizzazione dell'identità di Picone a operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti discontinui*^(*). Nota^(**) di MARIA GIOVANNA PLATONE GARRONI, presentata dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — Using a generalization of a well known identity by Picone, some comparison theorems for the solution of elliptic equations with discontinuous coefficients, not necessarily self adjoint, are proved.

Le ben note «identità di Picone» per equazioni differenziali ordinarie [4] e per equazioni alle derivate parziali ellittiche autoaggiunte [5] sono state recentemente riproposte in questi rendiconti da K. Kreith [3]. L'applicazione di tale identità permette di semplificare notevolmente le dimostrazioni dei teoremi di confronto per equazioni ellittiche autoaggiunte ottenute da vari autori (cfr. [2], [1], [7]). C. A. Swanson in [8] e [9], partendo da una identità diversa da quella del Picone, dimostra teoremi di confronto per operatori ellittici non autoaggiunti in domini illimitati. Tutti questi risultati riguardano sempre operatori con coefficienti regolari.

Non ci risulta che siano stati ottenuti teoremi di confronto per operatori ellittici a coefficienti discontinui, dove le soluzioni vanno intese in senso generalizzato.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei raggruppamenti di ricerca del C.N.R. per conto dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1969.

In tale nota si generalizza l'identità di Picone a soluzioni, soprasoluzioni e sottosoluzioni deboli rispetto a operatori ellittici a coefficienti discontinui, di tipo non necessariamente autoaggiunto, in aperti limitati, e si ottengono alcuni teoremi di confronto che generalizzano quelli già noti.

Sia Ω un aperto limitato sufficientemente regolare ⁽¹⁾ di uno spazio euclideo E^n , sia $\partial\Omega$ la sua frontiera e $\bar{\Omega}$ la sua chiusura.

Denotiamo con $\mathfrak{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili a supporto compatto in Ω , con $C^1(\bar{\Omega})$ la sottoclasse delle funzioni di $C^0(\bar{\Omega})$ aventi le derivate prime parziali in Ω che possono essere estese con continuità in $\bar{\Omega}$. Il completamento di $C^1(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^2(\Omega)}$$

sarà denotato con $H^1(\Omega)$. La chiusura in $H^1(\Omega)$ della sottoclasse $C_0^1(\bar{\Omega})$ delle funzioni di $C^1(\bar{\Omega})$ che si annullano su $\partial\Omega$ sarà denotata con $H_0^1(\Omega)$.

Consideriamo gli operatori differenziali

$$(1) \quad Lu \equiv - (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + 2 b_i(x) u_{x_i} + c(x) u$$

$$(2) \quad Mv \equiv - (\alpha_{ij}(x) v_{x_i})_{x_j} + 2 \beta_i(x) v_{x_i} + \gamma(x) v \quad (2)$$

dove a_{ij} , $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, c , γ , b_i , β_i sono funzioni reali e misurabili definite in Ω , che per semplicità supporremo limitate. Supponiamo che L e M siano uniformemente ellittici, esistano cioè due costanti λ e μ tali che $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 1$ e inoltre

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leq a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2$$

$$\mu^{-1} |\xi|^2 \leq \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \leq \mu |\xi|^2$$

per quasi tutti gli x di Ω e per tutti i vettori ξ di E^n .

Si considerino le forme bilineari associate rispettivamente agli operatori L e M :

$$l(u, v) = \int_{\Omega} \left[a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + (2 b_i u_{x_i} + cu) v \right] dx$$

$$m(u, v) = \int_{\Omega} \left[\alpha_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + (2 \beta_i u_{x_i} + \gamma u) v \right] dx$$

ove $u, v \in H^1(\Omega)$. Una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è detta soluzione dell'equazione $Lu = 0$ se per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ si ha: $l(u, \varphi) = 0$; una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è detta sottosoluzione (soprasoluzione) in rapporto all'operatore L , se per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, con $\varphi \geq 0$ in Ω , si ha: $l(u, \varphi) \leq 0$ (≥ 0).

(1) Le ipotesi su Ω che richiediamo sono quelle che assicurano la continuità in $\bar{\Omega}$ delle soluzioni in $H_0^1(\Omega)$ (cfr. [6]).

(2) Adotteremo la convenzione secondo la quale un indice ripetuto due volte sottintende una sommazione rispetto ad esso.

Nelle definizioni precedenti si può evidentemente prendere $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ in luogo di $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. È ovvio che analoghe definizioni valgono per l'operatore M .

LEMMA 1. — Siano $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $v \neq 0$ in $\bar{\Omega}$, rispettivamente soluzioni di

$$(3) \quad Lu = 0$$

$$(4) \quad Mv = 0;$$

allora si ha:

$$(5) \quad \int_{\Omega} \left[(a_{ij} - \alpha_{ij}) u_{x_i} u_{x_j} + 2u \left(b_i u_{x_i} - \frac{u}{v} \beta_i v_{x_i} \right) + \right. \\ \left. + (c - \gamma) u^2 + \alpha_{ij} \left(u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i} \right) \left(u_{x_j} - \frac{u}{v} v_{x_j} \right) \right] dx = 0.$$

Dimostrazione. Poiché u è continua in $\bar{\Omega}$ (cfr. [6]) e v è continua e diversa da zero in $\bar{\Omega}$, si ha $\frac{u^2}{v} \in H_0^1(\Omega)$ e quindi usando come funzioni test in (3) e in (4) rispettivamente u e u^2/v si ottiene

$$l(u, u) = 0$$

$$m\left(v, \frac{u^2}{v}\right) = 0,$$

da cui sottraendo membro a membro, si ha:

$$\int_{\Omega} \left[(a_{ij} - \alpha_{ij}) u_{x_i} u_{x_j} + 2u \left(b_i u_{x_i} - \frac{u}{v} \beta_i v_{x_i} \right) + \right. \\ \left. + (c - \gamma) u^2 + \alpha_{ij} \left[u_{x_i} u_{x_j} - v_{x_i} \left(\frac{u^2}{v} \right)_{x_j} \right] \right] dx = 0$$

e quindi, con ovvi passaggi, l'asserto.

Ai fini dei teoremi di confronto che ci interessa stabilire generalizziamo la (5) nel modo seguente:

LEMMA 1'. — Siano $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ sottosoluzione positiva o soprasoluzione negativa rispetto all'operatore L e $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ soprasoluzione positiva o sottosoluzione negativa in $\bar{\Omega}$ rispetto all'operatore M , si ha:

$$(5') \quad \int_{\Omega} \left[(a_{ij} - \alpha_{ij}) u_{x_i} u_{x_j} + 2u \left(b_i u_{x_i} - \frac{u}{v} \beta_i v_{x_i} \right) + \right. \\ \left. + (c - \gamma) u^2 + \alpha_{ij} \left(u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i} \right) \left(u_{x_j} - \frac{u}{v} v_{x_j} \right) \right] dx \leq 0.$$

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che in tutti i casi su enunciati si possono usare come funzioni test per L e M rispettivamente u e u^2/v e si ottiene sempre $l(u, u) \leq 0$, $m(v, u^2/v) \geq 0$ e quindi la (5').

Sia $Q(z)$ la forma quadratica in $n + 1$ variabili $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ definita da

$$Q(z) = \alpha_{ij} z_i z_j + \beta_i (z_i z_{n+1} + z_{n+1} z_i) + G z_{n+1}^2 \quad (\text{cfr. [8]})$$

dove $G(x) \in L^\infty(\Omega)$. Si verifica facilmente che c.n.s. perché la $Q(z)$ sia semidefinita positiva è che

$$(6) \quad G(x) \det((\alpha_{ij})) \geq - \sum_{i=1}^n \beta_i \beta_i^*$$

dove β_i^* denota il complemento algebrico di β_i nella matrice associata a $Q(z)$. Si vede immediatamente che in virtù della uniforme ellitticità di M esiste una G costante che soddisfa la (6).

TEOREMA 1. - Siano $u \in H_0^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzioni rispettivamente di (3) e (4) e sia $G(x) \in L^\infty(\Omega)$ verificante la (6); se

$$V[u, \Omega] = \int_{\Omega} [(a_{ij} - \alpha_{ij}) u_{x_i} u_{x_j} + 2u(b_i - \beta_i) u_{x_i} + (c - \gamma - G) u^2] dx > 0$$

allora $v(x)$ ha uno zero in $\overline{\Omega}$.

TEOREMA 2. - Supponiamo $b_i = \beta_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, in (1) e in (2) e $G(x) = 0$; se $u \in H_0^1(\Omega)$ non identicamente nulla e $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sono soluzioni rispettivamente di (3) e di (4) e $V[u, \Omega] \geq 0$; allora $v(x)$ ha uno zero in $\overline{\Omega}$.

Dimostrazione del teorema 1. - Se $v(x) \neq 0$ in $\overline{\Omega}$ vale la (5), che si può scrivere nel modo seguente:

$$V[u, \Omega] + \int_{\Omega} \left[\alpha_{ij} \left(u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i} \right) \left(u_{x_j} - \frac{u}{v} v_{x_j} \right) + \right. \\ \left. + 2u \beta_i \left(u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i} \right) + G u^2 \right] dx = 0.$$

Considerando la forma quadratica $Q(z)$, ove $z_i = u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $z_{n+1} = u$, la (5) si può scrivere:

$$V[u, \Omega] + \int_{\Omega} Q(z) dx = 0,$$

ma ciò è assurdo perché $V[u, \Omega] > 0$, $Q(z) \geq 0$; ne segue che $v(x) = 0$ per qualche $x \in \overline{\Omega}$.

Osservazione 1. - Se si suppone che la forma quadratica $Q(z)$ sia definita positiva e cioè che la $G(x)$ verifichi la condizione

$$(6') \quad G(x) \det((\alpha_{ij})) > - \sum_{i=1}^n \beta_i \beta_i^*,$$

nel teorema 1 l'ipotesi $V[u, \Omega] > 0$ può essere ovviamente sostituita dalla $V[u, \Omega] \geq 0$, con u non identicamente nulla in Ω .

Dimostrazione del teorema 2. — In questo caso la (5) diventa

$$\int_{\Omega} \left[(a_i - \alpha_{ij}) u_{x_i} u_{x_j} + (c - \gamma) u^2 + \alpha_{ij} \left(u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i} \right) \left(u_{x_j} - \frac{u}{v} v_{x_j} \right) \right] dx = 0;$$

tale condizione può essere soddisfatta solo se

$$u_{x_i} = \frac{u}{v} v_{x_i} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{q. o. in } \Omega.$$

Ciò ci assicura, poiché u non è identicamente nulla, $u = kv$ q. o. in Ω ; poiché u e $v \in C^0(\overline{\Omega})$ ne segue $u = kv$ in $\overline{\Omega}$. Poiché $u = 0$ su $\partial\Omega$ ciò è una contraddizione e mostra che $v(x) = 0$ per qualche $x \in \overline{\Omega}$.

I teoremi 1 e 2 si possono generalizzare nel modo seguente, sfruttando il lemma 1' anziché il lemma 1 e tenendo conto della osservazione I.

TEOREMA 1'. — Sia $G(x) \in L^\infty(\Omega)$ verificante la (6) [(6')], sia $u \in H_0^1(\Omega)$ [$u \in H_0^1(\Omega)$ non identicamente nulla in $\overline{\Omega}$], soluzione di (3), oppure $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sottosoluzione positiva in Ω o soprasoluzione negativa in Ω rispetto all'operatore L , e tale che $V[u, \Omega] > 0$, [$V[u, \Omega] \geq 0$]; allora non esiste una $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ che rispetto a M sia soprasoluzione positiva in $\overline{\Omega}$ o sottosoluzione negativa in $\overline{\Omega}$.

TEOREMA 2'. — Supponiamo $b_i = \beta_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ in (1) e in (2) e $G(x) = 0$; sia $u \in H_0^1(\Omega)$ non identicamente nulla in $\overline{\Omega}$ soluzione di (3), oppure $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sottosoluzione positiva in Ω o soprasoluzione negativa in Ω rispetto all'operatore L e tale che $V[u, \Omega] \geq 0$; allora non esiste una $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ che rispetto a M sia soprasoluzione positiva in $\overline{\Omega}$ o sottosoluzione negativa in $\overline{\Omega}$.

TEOREMA 3'. — Sia $G(x) \in L^\infty(\Omega)$ verificante la (6) [(6')]; sia $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ [$u \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ non identicamente nulla in $\overline{\Omega}$] tale che

$$J[u, \Omega] = \int_{\Omega} [\alpha_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + 2\beta_i u u_{x_i} + (\gamma + G) u^2] dx < 0 \quad [J[u, \Omega] \leq 0];$$

allora non esiste una $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ che sia rispetto a M soprasoluzione positiva in $\overline{\Omega}$ o sottosoluzione negativa in $\overline{\Omega}$; in particolare ogni soluzione di $Mv = 0$ deve annullarsi in qualche punto di $\overline{\Omega}$.

Nel caso autoaggiunto $\beta_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ e $G = 0$, le stesse conclusioni sono sempre valide con l'ipotesi $J[u, \Omega] \leq 0$ e u non identicamente nulla in Ω .

Dimostrazione del teorema 3'. — Si vede immediatamente che le identità (5) e (5') di cui rispettivamente ai lemmi 1 e 1' si possono ottenere, nell'ipotesi $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, anche nel caso in cui si lasci cadere l'ipotesi dell'uniforme ellitticità di L e la si sostituisca con l'ipotesi di ellitticità o addirittura

con l'ipotesi $a_{ij} = 0$, $b_i = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $c = 0$; in questo caso la (5) e la (5') diventano rispettivamente

$$\int_{\Omega} \left[\alpha_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + 2 \frac{u^2}{v} \beta_i v_{x_i} + \gamma u^2 - \alpha_{ij} \left(u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i} \right) \left(u_{x_j} - \frac{u}{v} v_{x_j} \right) \right] dx = 0 \quad [\geq 0];$$

partendo da tali identità con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti nei teoremi 1, 1', 2 e 2' si ottiene l'asserto.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. CLARK e C. A. SWANSON, *Comparison theorems for elliptic differential equations*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 16, 886–890 (1965).
- [2] P. HARTMAN e A. WINTNER, *On a comparison theorem for self-adjoint partial differential equations of elliptic type*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 6, 862–865 (1955).
- [3] K. KREITH, *A Generalized Picone Identity*, « Rend. Acc. Lincei », 45, 217–220, novembre 1968.
- [4] M. PICONE, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende una equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine*, « Annali della Scuola Nor. Sup. di Pisa », 11, 1 (1910).
- [5] M. PICONE, *Un teorema sulle soluzioni delle equazioni lineari ellittiche autoagginte alle derivate parziali del secondo ordine*, « Rend. Acc. Lincei », 20, I, 213–219 (1911).
- [6] G. STAMPACCHIA, *Equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus*, Les Presses de l'Université de Montreal 1966.
- [7] C. A. SWANSON, *A comparison theorem for elliptic differential equations*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 17, 611–616 (1966).
- [8] C. A. SWANSON, *Comparison theorems for elliptic equations on unbounded domains*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 126, 278–285 (1967).
- [9] C. A. SWANSON, *An identity for elliptic equations with applications*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 134, 325–333 (1968).