Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ion Săcuiu, Radu Theodorescu

Sur l'efficacité des estimateurs

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.1-2, p. 9–15.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_1-2_9_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Statistica matematica. — *Sur l'efficacité des estimateurs* (*). Nota (**) di ION SĂCUIU (***) e RADU THEODORESCU (****), presentata dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si considera come misura dell'efficienza di un estimatore il prodotto tra la dispersione ed il tempo necessario per calcolarlo, e si danno esempi al riguardo.

1. Soit ξ une variable aléatoire (réelle) dont la fonction de répartition est $F(\cdot\,;\theta)$, où $\theta \in \Theta \subset R = (-\infty, +\infty)$ est un paramètre inconnu dont la vraie valeur est θ_0 et qu'on cherche à estimer. Notons par $\mathcal{T}(\theta_0)$ l'ensemble de tous les estimateurs sans biais $\tilde{\theta}$ de θ_0. Dans les applications on cherche toujours des estimateurs $\tilde{\theta} \in \mathcal{T}(\theta_0)$ de variance minimale ou des estimateurs (asymptotiquement) efficaces, s'il en existe; c'est un critère qui tient compte, en fait, de la précision des estimateurs. Mais il y a encore un facteur important qu'on ne doit pas négliger, à savoir le temps $\tau_{\tilde{\theta}}$ nécessaire à calculer une estimation à partir d'un estimateur donné $\tilde{\theta}$ de θ_0 et d'une réalisation de l'échantillon.

Etant donné un ordinateur et une méthode de calcul fixés on peut supposer que $\tau_{\tilde{\theta}}$ est une fonction de la taille n de l'échantillon issu de ξ et de plusieurs paramètres a_j, $1 \le j \le s$, connus qui caractérisent le temps nécessaire à effectuer les opérations élémentaires O_j, $1 \le j \le s$. Nous allons noter par la suite avec $\boldsymbol{a}$ le paramètre à s dimensions $(a_1, \cdots, a_s)$. Il s'ensuit que $\tau_{\tilde{\theta}} = \tau_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n)$; par sa nature, $\tau_{\tilde{\theta}}$ est un rationnel. Il est alors naturel de choisir, en ce qui concerne le temps, l'estimateur qui nécessite le temps minimal; on pourrait l'appeler *estimateur de temps minimal*. Posons

$$0 < \tau(\boldsymbol{a}\,;n) = \inf_{\tilde{\theta} \in \mathcal{T}(\theta_0)} \tau_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n)\,;$$

si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}(\theta_0)$ est une partie finie et si la borne inférieure concerne seulement $\mathcal{T}_1$, alors il existe toujours $\tilde{\theta} \in \mathcal{T}_1$ tel que

$$\tau_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n) = \tau(\boldsymbol{a}\,;n)\,.$$

Si dans le choix d'un estimateur $\tilde{\theta}$ de θ_0 nous tenons compte simultanément du critère de la variance minimale et du critère du temps minimal,

(*) Ce travail a été fait en partie à l'Institut de recherche d'été 1969, organisé à Queen's University, Kingston, Ontario.

(**) Pervenuta all'Accademia l'1 agosto 1969.

(***) Centre de statistique mathématique, Bucarest 12, Roumanie.

(****) Université Laval, Département de Mathématiques, Québec 10, Canada.

alors nous sommes conduits à envisager la quantité

$$\psi_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n) = D^2(\tilde{\theta} \mid \theta_0)\, \tau_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n)$$

qu'on pourrait appeler *vartemps* de $\tilde{\theta}$ et qui suggère de prendre comme estimateur $\tilde{\theta}$ de θ_0 celui qui le rend minimal.

THÉORÈME. *Supposons que* F *vérifie les conditions assurant la valabilité de l'inégalité de Cramér-Rao. Si* $\tilde{\theta} \in \mathcal{T}(\theta_0)$, *alors*

$$\psi_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n) \geq \frac{\tau(\boldsymbol{a}\,;n)}{E(\mathrm{S}_n^2 \mid \theta_0)}, \tag{1}$$

où

$$\mathrm{S}_n(x_1,\cdots,x_n\,;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \log \mathrm{dF}_n(x_1,\cdots,x_n\,;\theta),$$

F_n *étant la fonction de répartition de l'échantillon de taille n issu de* ξ. *Le signe d'égalité dans* (1) *a lieu si et seulement si*

$$\frac{\dfrac{1}{E(\mathrm{S}_n^2 \mid \theta_0)}}{D^2(\tilde{\theta} \mid \theta_0)} = \frac{\tau_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n)}{\tau(\boldsymbol{a}\,;n)}. \tag{2}$$

Si $\hat{\theta}$ est un estimateur efficace de θ_0, alors (2) devient

$$\frac{D^2(\hat{\theta} \mid \theta_0)}{D^2(\tilde{\theta} \mid \theta_0)} \cdot \frac{\tau(\boldsymbol{a}\,;n)}{\tau_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n)} = 1\,.$$

Le théorème précédent justifie l'introduction de la notion d'*efficacité spatiale–temporelle* d'un estimateur $\tilde{\theta} \in \mathcal{T}(\theta_0)$ par la relation

$$\mathrm{eff}_{\mathrm{st}}(\tilde{\theta} \mid \theta_0) = \frac{D^2(\hat{\theta} \mid \theta_0)\, \tau(\boldsymbol{a}\,;n)}{\psi_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n)}\,;$$

évidemment

$$0 \leq \mathrm{eff}_{\mathrm{st}}(\tilde{\theta} \mid \theta_0) \leq 1\,.$$

On a

$$\mathrm{eff}_{\mathrm{st}}(\tilde{\theta} \mid \theta_0) = \frac{D^2(\hat{\theta} \mid \theta_0)}{D^2(\tilde{\theta} \mid \theta_0)} \cdot \frac{\tau(\boldsymbol{a}\,;n)}{\tau_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n)} = \mathrm{eff}_{\mathrm{s}}(\tilde{\theta} \mid \theta_0) \cdot \mathrm{eff}_{\mathrm{t}}(\tilde{\theta} \mid \theta_0)\,,$$

où $\mathrm{eff}_{\mathrm{s}}(\tilde{\theta} \mid \theta_0) = \mathrm{eff}(\tilde{\theta} \mid \theta_0)$ est l'efficacité usuelle de $\tilde{\theta}$, qu'on pourrait appelér *spatiale*, et

$$\mathrm{eff}_{\mathrm{t}}(\tilde{\theta} \mid \theta_0) = \frac{\tau(\boldsymbol{a}\,;n)}{\tau_{\tilde{\theta}}(\boldsymbol{a}\,;n)}$$

est une quantité qu'on pourrait appeler *efficacité temporelle* de $\tilde{\theta}$. Il s'ensuit que (1) devient une égalité si et seulement si $\tilde{\theta}$ est *efficace spatiellement–temporellement*, c'est–à–dire si et seulement si

$$\mathrm{eff}_{\mathrm{st}}(\tilde{\theta} \mid \theta_0) = 1 \tag{3}$$

ce qui équivaut à

$$\mathrm{eff}_s(\tilde{\theta} \mid \theta_0) = 1 \quad , \quad \mathrm{eff}_t(\tilde{\theta} \mid \theta_0) = 1 ,$$

c'est-à-dire $\tilde{\theta}$ est simultanément efficace et temporellement efficace.

Notons que l'efficacité spatiale-temporelle est évidemment une fonction de n, donc il est bien possible que la relation (3) ait lieu à la limite lorsque $n \to \infty$; autrement dit $\tilde{\theta}$ sera un estimateur *asymptotiquement spatiellement-temporellement efficace*.

2. Dans la pratique statistique on est très souvent restreint à une famille, en général finie, d'estimateurs $\tilde{\theta} \in \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}(\theta_0)$ et on est obligé d'en faire un choix, disons d'après le critère du vartemps minimal ou de l'efficacité spatielle-temporelle maximale. De même, il est bien possible que pour des valeurs différentes de n nous obtenions des estimateurs différents par la suite de l'application de ce critère.

Examinons trois exemples.

1° Soit un rectangle dont l'aire A est inconnue, A_0 étant la vraie valeur de cette aire. Soient alors ξ et η deux variables aléatoires de carré intégrables et non corrélées telles que $A = \xi\eta$ et $E(A) = A_0$ et posons $u_0 = E(\xi)$ et $v_0 = E(\eta)$ pour les vraies dimensions du rectangle. A l'aide d'un échantillon $((\xi_1, \eta_1), \cdots, (\xi_n, \eta_n))$ de taille n issu de (ξ, η) (1) nous construisons la famille d'estimateurs $\mathcal{C}_1 = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\} \subset \mathcal{C}(A_0)$

$$\tilde{A}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i ,$$

$$\tilde{A}_2 = \bar{x}\bar{y} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \eta_i\right).$$

On a

$$D^2(\tilde{A}_2 \mid A_0) < D^2(\tilde{A}_1 \mid A_0)$$

puisque

$$D^2(\tilde{A}_1 \mid A_0) = \frac{1}{n}\left[E^2(\eta \mid v_0) D^2(\xi \mid u_0) + E^2(\xi \mid u_0) D^2(\eta \mid v_0) + D^2(\xi \mid u_0) D^2(\eta \mid v_0)\right] = \frac{1}{n}(b_1 + b_2)$$

et

$$D^2(\tilde{A}_2 \mid A_0) = \frac{1}{n}\left[E^2(\eta \mid v_0) D^2(\xi \mid u_0) + E^2(\xi \mid u_0) D^2(\eta \mid v_0) + \frac{D^2(\xi \mid u_0) D^2(\eta \mid v_0)}{n}\right] = \frac{1}{n}\left(b_1 + \frac{b_2}{n}\right),$$

où

$$b_1 = E^2(\xi \mid u_0)\, D^2(\eta \mid v_0) + E^2(\eta \mid v_0)\, D^2(\xi \mid u_0) ,$$
$$b_2 = D^2(\xi \mid u_0)\, D^2(\eta \mid v_0) .$$

(1) Autrement dit à l'aide de n mesures.

Ici nous avons fait usage du fait que si ξ_i, $1 \leq i \leq n$, sont des variables aléatoires telles que $\xi_1^k \cdots \xi_{j-1}^k$ et ξ_j^k, $1 \leq j \leq n$, $k = 1, 2$, sont non corrélées, alors

$$(4) \qquad D^2\left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{u} E^2(\xi_1) \cdots E^2(\xi_{i-1})\, D^2(\xi_i)\, E^2(\xi_{i+1}) \cdots E^2(\xi_n) +$$

$$+ \sum_{i_1 < i_2} E^2(\xi_1) \cdots E^2(\xi_{i_1 - 1})\, D^2(\xi_{i_1})\, E^2(\xi_{i_1+1}) \cdots E^2(\xi_{i_2-1})\, D^2(\xi_{i_2})\, E^2(\xi_{i_2+1}) \cdots E^2(\xi_n) +$$

$$+ \cdots + \prod_{i=1}^{n} D^2(\xi_i) .$$

Calculons maintenant $\tau_{\tilde{A}_1}$ et $\tau_{\tilde{A}_2}$ pour une réalisation $((x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n))$ de l'échantillon considéré. Le nombre d'opérations est:

$2n + 1$ dont n additions, n multiplications et une division pour $\tilde{A}_1$ écrit sous la forme

$$\tilde{A}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i}{n} ;$$

$2n + 3$ dont $2n$ additions, deux multiplications et une division pour A_2 écrit sous la forme

$$\tilde{A}_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n^2} .$$

Nous avons pris ici les formes de $\tilde{A}_1$ et de $\tilde{A}_2$ qui conduisent au nombre le plus petit d'opérations; en même temps nous avons évité autant que possible les divisions puisque si a_1, a_2 et a_3 sont les temps nécessaires d'effectuer, respectivement, une addition, une multiplication et une division sur un ordinateur et avec une méthode donnée, alors en général

$$a_1 < a_2 < a_3 .$$

Il s'ensuit que

$$\tau_{\tilde{A}_1}(a_1, a_2, a_3; n) = na_1 + na_2 + a_3 = n(a_1 + a_2) + a_3 ,$$

$$\tau_{\tilde{A}_2}(a_1, a_2, a_3; n) = 2na_1 + 2a_2 + a_3 .$$

L'équation

$$\tau_{\tilde{A}_1}(a_1, a_2, a_3; n) = \tau_{\tilde{A}_2}(a_1, a_2, a_3; n)$$

nous fournit comme solution $\dfrac{2a_2}{a_2 - a_1}$ qui ne dépend pas de a_3. Puisque

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\tau_{\tilde{A}_1}(a_1, a_2, a_3; n)}{\tau_{\tilde{A}_2}(a_1, a_2, a_3; n)} = \frac{a_1 + a_2}{2a_1} > 1 ,$$

il résulte que

$$\tau_{\tilde{A}_1}(a_1, a_2, a_3; n) \lesseqgtr \tau_{\tilde{A}_2}(a_1, a_2, a_3; n) \quad \text{si} \quad n \lesseqgtr n_0,$$

où $n_0 = \left[\dfrac{2a_2}{a_2 - a_1}\right]$ (2).

Examinons ensuite les vartemps. On a

$$\psi_{\tilde{A}_2}(a_1, a_2, a_3; n) < \psi_{\tilde{A}_1}(a_1, a_2, a_3; n)$$

si $n \geq n_0$. Soit maintenant l'équation

$$\psi_{\tilde{A}_1}(a_1, a_2, a_3; n) = \psi_{\tilde{A}_2}(a_1, a_2, a_3; n)$$

ou

$$(b_1(a_2 - a_1) + b_2(a_2 + a_1))\, n^2 - (2b_1 a_2 + b_2(2a_1 - a_3))\, n - b_2(a_2 + 2a_3) = 0;$$

il existe alors une solution positive de cette équation dont la partie entière sera notée par n_1 et telle que

$$\psi_{\tilde{A}_1}(a_1, a_2, a_3; n) \lesseqgtr \psi_{\tilde{A}_2}(a_1, a_2, a_3; n) \quad \text{si} \quad n \lesseqgtr n_1.$$

Il s'ensuit évidemment que $n_1 \leq n_0$. Donc, en appliquant le critère du vartemps minimal nous concluons qu'on devrait utiliser $\tilde{A}_1$ ou $\tilde{A}_2$ selon que $n \leq n_1$ ou $n \geq n_1$; mais puisque n_1 est fonction de paramètres inconnus il est lui même inconnu. Par conséquent n_0 est le seul naturel bien déterminé. Ajoutons encore que pour les ordinateurs modernes $n_0 = 2$ ou 3.

2° Considérons maintenant un parallélepipède de volume V inconnu et dont sa vraie valeur est V_0. Soient alors ξ, η et ζ trois variables aléatoires de carré intégrable et indépendantes (3) telles que $V = \xi\eta\zeta$ et $E(V) = V_0$ et posons $u_0 = E(\xi)$, $v_0 = E(\eta)$ et $w_0 = E(\zeta)$ pour les vraies dimensions du parallélepipède. A l'aide d'un échantillon $((\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \cdots, (\xi_n, \eta_n, \zeta_n))$ de taille n issu de (ξ, η, ζ) (4) nous construisons la famille d'estimateurs $\mathcal{E}_1 = \{\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3\} \subset \mathcal{E}(V_0)$

$$\tilde{V}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \zeta_i,$$

$$\tilde{V}_2 = \tilde{A}\bar{z} \overset{(5)}{=} \begin{cases} \tilde{A}_1\bar{z} = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \zeta_i\right), \\ \tilde{A}_2\bar{z} = \left[\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right)\right]\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right), \end{cases}$$

$$\tilde{V}_3 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \zeta_i\right),$$

où $\tilde{A} \in \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ est un estimateur de la base.

(2) $[x]$ est la partie entière de x.

(3) On pourrait supposer une condition moins forte, telle que (4) ait lieu.

(4) Voir la note (1).

(5) Evidemment, on pourrait considérer aussi les estimateurs $\tilde{A}\bar{x}$ et $\tilde{A}\bar{y}$ mais du point de vue de nos considérations ils sont équivalents à $\tilde{A}\bar{z}$.

On a

$$D^2(\tilde{\tilde{V}}_3 \mid V_0) < D^2(\tilde{\tilde{V}}_2 \mid V_0) < D^2(\tilde{\tilde{V}}_1 \mid V_0)\,.$$

Calculons maintenant $\tau_{\tilde{\tilde{V}}_1}$, $\tau_{\tilde{\tilde{V}}_2}$ et $\tau_{\tilde{\tilde{V}}_3}$ pour une réalisation $((x_1, y_1, z_1), \cdots, (x_n, y_n, z_n))$ de l'échantillon considéré. Le nombre d'opérations est:

$3n+1$ dont n additions, $2n$ multiplications et une division pour $\tilde{\tilde{V}}_1$ écrit sous la forme

$$\tilde{\tilde{V}}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \zeta_i}{n}\,;$$

$3n+3$ dont $2n$ additions, $n+2$ multiplications et une division pour $\tilde{\tilde{V}}_2 = \tilde{A}_1 \bar{z}$ écrit sous la forme

$$\tilde{\tilde{V}}_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)}{n^2}\,;$$

$3n+5$ dont $3n$ additions, 4 multiplications et une division pour $\tilde{\tilde{V}}_3$ écrit sous la forme

$$\tilde{\tilde{V}}_3 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)}{n^3}\,.$$

Nous avons pris les formes de $\tilde{\tilde{V}}_1$, de $\tilde{\tilde{V}}_2$ et de $\tilde{\tilde{V}}_3$ d'après les mêmes critères que celles de $\tilde{A}_1$ et de $\tilde{A}_2$.

Il s'ensuit que

$$\tau_{\tilde{\tilde{V}}_1}(a_1, a_2, a_3; n) = na_1 + 2na_2 + a_3 = n(a_1 + 2a_2) + a_3\,,$$

$$\tau_{\tilde{\tilde{V}}_2}(a_1, a_2, a_3; n) = 2na_1 + (n+2)a_2 + a_3 = n(2a_1 + a_2) + 2a_2 + a_3\,,$$

$$\tau_{\tilde{\tilde{V}}_3}(a_1, a_2, a_3; n) = 3na_1 + 4a_2 + a_3\,.$$

Les équations

$$\tau_{\tilde{\tilde{V}}_1}(a_1, a_2, a_3; n) = \tau_{\tilde{\tilde{V}}_2}(a_1, a_2, a_3; n)\,,$$

$$\tau_{\tilde{\tilde{V}}_2}(a_1, a_2, a_3; n) = \tau_{\tilde{\tilde{V}}_3}(a_1, a_2, a_3; n)\,,$$

$$\tau_{\tilde{\tilde{V}}_3}(a_1, a_2, a_3; n) = \tau_{\tilde{\tilde{V}}_1}(a_1, a_2, a_3; n)$$

ont même solution $\dfrac{2a_2}{a_2 - a_1}$ qui ne dépend pas de a_3. Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_{\tilde{\tilde{V}}_1}(a_1, a_2, a_3; n)}{\tau_{\tilde{\tilde{V}}_2}(a_1, a_2, a_3; n)} = \frac{a_1 + 2a_2}{2a_1 + a_2} > 1\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_{\tilde{\tilde{V}}_2}(a_1, a_2, a_3; n)}{\tau_{\tilde{\tilde{V}}_3}(a_1, a_2, a_3; n)} = \frac{2a_1 + a_2}{3a_1} > 1\,,$$

il résulte que

$$\tau_{\tilde{V}_1}(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,;\,n) \lesseqgtr \tau_{\tilde{V}_2}(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,;\,n) \lesseqgtr \tau_{\tilde{V}_3}(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,;\,n) \quad \text{si} \quad n \lesseqgtr n_0\,,$$

où $n_0 = \left[\dfrac{2\,a_2}{a_2 - a_1}\right]$.

Passons maintenant aux vartemps. On a

$$\psi_{\tilde{V}_3}(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,;\,n) < \psi_{\tilde{V}_2}(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,;\,n) < \psi_{\tilde{V}_1}(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,;\,n)$$

si $n \geq n_0$. Si $n \leq n_0$, la discussion n'est pas possible parce que les quantités qui y interviennent dépendent de paramètres inconnus de même que pour le cas examiné au 1°.

Les résultats exposés aux 1° et 2° peuvent être généralisés à un espace à $m > 3$ dimensions.

3° Pour l'espérance mathématique inconnue θ d'une variable aléatoire ξ on peut utiliser comme estimateurs l'espérance mathématique empirique $\bar{x}$ et la médiane empirique μ^*.

En général

$$\tau_{\mu^*}(\boldsymbol{a}\,;\,n) \simeq \frac{n}{2}\,\tau_{\bar{x}}(\boldsymbol{a}\,;\,n)$$

donc

$$\psi_{\bar{x}}(\boldsymbol{a}\,;\,n) < \psi_{\mu^*}(\boldsymbol{a}\,;\,n)\,.$$

De plus si ξ est normale et si la variance $D^2(\xi) = \sigma^2$ est connue, alors

$$\psi_{\bar{x}}(\boldsymbol{a}\,;\,n) = \frac{\sigma^2}{n}\cdot\tau_{\bar{x}}(\boldsymbol{a}\,;\,n)\,,$$

$$\psi_{\mu^*}(\boldsymbol{a}\,;\,n) = \frac{\pi\sigma^2}{2\,n}\cdot\frac{n}{2}\,\tau_{\bar{x}}(\boldsymbol{a}\,;\,n)$$

ce qui entraîne

$$\psi_{\mu^*}(\boldsymbol{a}\,;\,n) = \frac{\pi n}{4}\,\psi_{\bar{x}}(\boldsymbol{a}\,;\,n)\,.$$