Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Massimo Furi, Mario Martelli

Successioni di trasformazioni in uno spazio metrico e punti fissi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.1-2, p. 27–31.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_1-2_27_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Topologia. — *Successioni di trasformazioni in uno spazio metrico e punti fissi* (*). Nota (**) di MASSIMO FURI e MARIO MARTELLI, presentata dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — Let $\{T_n\}$ be a sequence of mappings of a metric space into itself, which converges to T. We give some conditions for any sequence $\{x_n\}$ of fixed points of $\{T_n\}$ to be compact, and such that all the limit points of $\{x_n\}$ are fixed points for T.

Sia (X, d) uno spazio metrico completo, $T: X \to X$ una trasformazione continua, $\Omega = \{x \in X : x = T(x)\}$ l'insieme dei punti fissi della T e $\{T_n\}$ una successione di trasformazioni continue di X in sé. Nel presente lavoro si cercano condizioni da porre su X, T e $\{T_n\}$, perché le successioni $\{x_n\}$, tali che $T_n(x_n) = x_n$ (o, più in generale, $d(T_n(x_n), x_n) \to 0$), siano compatte e abbiano tutti i punti limite appartenenti ad Ω. In particolare ciò implica, qualora la T abbia uno e un sol punto fisso ξ, la convergenza di $\{x_n\}$ a ξ. In questo caso è noto il seguente risultato (cfr. F. F. Bonsall [1]):

« Siano T e T_n $(n = 1, 2, \cdots)$ contrazioni in uno spazio metrico completo X, aventi la stessa costante di Lipschitz $k < 1$ e con punti fissi ξ e x_n rispettivamente. Se $T_n(x) \to T(x)$ per ogni $x \in X$, allora $x_n \to \xi$ ».

1. Introduciamo le seguenti definizioni.

Definizione 1. Sia T una trasformazione di uno spazio metrico (X, d) in sé. Si dice che T è *debolmente contrattiva* se $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$; *contrattiva* se esiste $0 \leq k < 1$, tale che $d(T(x), T(y)) \leq$ $\leq k d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Definizione 2. (cfr. C. Kuratowski [2]) Sia A un sottoinsieme limitato di uno spazio metrico X. Con il numero reale $\alpha(A)$ si intende l'estremo inferiore degli $\varepsilon > 0$, per i quali A ammette una partizione finita di insiemi aventi diametro minore di ε. Sono di immediata verifica le seguenti proprietà:

a) $\alpha(A) = 0$ se e solo se A è precompatto;
b) $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$;
c) se $A \subset B$ allora $\alpha(A) \leq \alpha(B)$
d) $\alpha(A) \leq \delta(A)$, essendo $\delta(A)$ il diametro di A.

Ci sarà utile in seguito il

LEMMA 1. *Sia* $\{T_n\}$ *una successione di trasformazioni di uno spazio metrico* (X, d) *in sé, convergente uniformemente ad una trasformazione continua* T. *Se* $\{x_n\}$ *è una successione tale che* $d(T_n(x_n), x_n) \to 0$ *e* z *un punto limite di* $\{x_n\}$, *allora* $z = T(z)$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Contratto di Ricerca n. 115. 3083. 0 5179 del C.N.R. « Equazioni Funzionali ».
(**) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1969.

Dimostrazione. Senza perdere in generalità possiamo supporre $x_n \to z$. Poiché

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, T_n(x_n)) + d(T_n(x_n), T(x_n)) + d(T(x_n), T(z)),$$

allora $d(z, T(z)) = 0$. ▮

TEOREMA 1. *Sia* $\{T_n\}$ *una successione di trasformazioni di uno spazio metrico completo* (X, d) *in sé, uniformemente convergente ad una trasformazione continua* T. *Posto* $\Omega_\varrho = \{x \in X : d(T(x), x) \leq \rho\}$, *se* $\alpha(\Omega_\varrho) \to 0$ *per* $\rho \to 0$, *allora ogni successione* $\{x_n\}$, *tale che* $d(T_n(x_n), x_n) \to 0$, *è compatta ed i suoi punti limite sono fissi per la* T.

Dimostrazione. Poiché

a) $\alpha(\Omega_\varrho) \to 0$ per $\rho \to 0$;

b) $\Omega_{\varrho_1} \subset \Omega_{\varrho_2}$ se $\rho_1 \leq \rho_2$;

c) gli Ω_ϱ sono chiusi,

dal teorema di Cantor generalizzato (C. Kuratowski [2]) segue che

$$\Omega = \bigcap_{\varrho > 0} \Omega_\varrho$$

è non vuoto e compatto. Inoltre la distanza di Hausdorff [1] fra Ω_ϱ e Ω, $D(\Omega_\varrho, \Omega)$, tende a zero per $\rho \to 0$. D'altra parte, essendo $d(T(x_n), x_n) \leq$ $\leq d(T(x_n), T_n(x_n)) + d(T_n(x_n), x_n)$, dall'uniforme convergenza di $\{T_n\}$ a T e dall'ipotesi $d(T_n(x_n), x_n) \to 0$ abbiamo $d(T(x_n), x_n) \to 0$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\rho)$ tale che, per ogni $n > n(\rho)$, si ha $x_n \in \Omega_\varrho$; e poiché $D(\Omega_\varrho, \Omega) \to 0$ anche $d(x_n, \Omega) \to 0$.

Essendo Ω compatto per ogni intero $n > 0$ esiste $y_n \in \Omega$ tale che $d(x_n, y_n) = d(x_n, \Omega)$; perciò $d(x_n, y_n) \to 0$. Infine, poiché $\{y_n\}$ è compatta, anche $\{x_n\}$ è compatta ed i suoi punti limite appartengono ad Ω. ▮

Si noti che nel Teorema 1 l'ipotesi di completezza di X può essere rimossa, purché si supponga $\bigcap_{\varrho > 0} \Omega_\varrho \neq \Phi$. Da questa osservazione segue il

COROLLARIO 1. (Sam B. Nadler, Jr. [3]). *Sia* (X, d) *uno spazio metrico,* T *una contrazione in* X *con punto fisso* ξ *e* T_n, $n = 1, 2 \cdots$, *trasformazioni di* X *in sé con punto fisso unico,* x_n. *Se* $\{T_n\}$ *converge uniformemente a* T, *allora* $x_n \to \xi$.

Dimostrazione. Sia $\Omega_\varrho = \{x \in X : d(x, T(x)) \leq \rho\}$. Poiché $\bigcap_{\varrho > 0} \Omega_\varrho = \xi \neq \Phi$, è sufficiente provare che $\alpha(\Omega_\varrho) \to 0$ per $\rho \to 0$. Se $0 \leq k < 1$ è la costante di Lipschitz di T, per $x, y \in \Omega_\varrho$ si ha

$$d(x, y) \leq d(x, T(x)) + d(T(x), T(y)) + d(T(y), y) \leq 2\rho + k d(x, y)$$

e quindi $\delta(\Omega_\varrho) \leq \dfrac{2\rho}{1-k}$.

Da ciò segue che per $\rho \to 0$, $\delta(\Omega_\varrho) \to 0$ e perciò anche $\alpha(\Omega_\varrho) \to 0$. ▮

(1) $D(A, B)$, dove A e B sono insiemi chiusi di uno spazio metrico, è $\max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$, essendo $\rho(A, B) = \sup\{d(x, B) : x \in A\}$.

TEOREMA 2. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico localmente compatto,* T *una trasformazione di* X *in sé, debolmente contrattiva e dotata di punto fisso* $\xi \in X$. *Se* $\{T_n\}$ *è una successione di trasformazioni debolmente contrattive in* X, *convergenti puntualmente a* T, *allora esiste un intero positivo* $\bar{n}$, *tale che, per* $n > \bar{n}$, T_n *ammette punto fisso* x_n *e si ha* $x_n \to \xi$.

Dimostrazione. Per la locale compattezza di X esiste una sfera compatta K, di centro ξ e raggio r. Sia $\rho = \max\{d(\xi, T(x)) : x \in K\}$; essendo T debolmente contrattiva si ha $\rho < r$. Poiché $\{T_n\}$ è una successione di trasformazioni debolmente contrattive e quindi equicontinue, $T_n(x) \to T(x)$ uniformemente in K. Esiste quindi un intero positivo $\bar{n}$ tale che

$$d(T_n(x), T(x)) < r - \rho$$

per ogni $n > \bar{n}$ e $x \in K$. Da ciò segue

$$d(T_n(x), \xi) \leq d(T_n(x), T(x)) + d(T(x), \xi) < r$$

ovvero T_n trasforma K in sé.

Essendo K compatto e T_n debolmente contrattiva, esiste ed è unico $x_n \in K$ tale che $x_n = T_n(x_n)$ (cfr. M. Edelstein [4]). Ovviamente la successione $\{x_n\}$, $n > \bar{n}$, ammette almeno un punto limite $y \in K$. Ma, per il lemma 1, $y = T(y)$, e, per l'unicità del punto fisso della T, $y = \xi$. Dunque $x_n \to \xi$. ▮

COROLLARIO 2. (Sam B. Nadler, Jr. [3]) *Sia* (X, d) *uno spazio metrico localmente compatto,* T *e* T_n, $n = 1, 2, \cdots$, *contrazioni in* X *con punti fissi* ξ *e* x_n *rispettivamente. Se* $T_n(x) \to T(x)$ *puntualmente, allora* $x_n \to \xi$.

2. In questa seconda parte si dimostra un teorema analogo al precedente, con ipotesi più generali sulla successione $\{T_n\}$, nel caso che X sia uno spazio lineare normato a dimensione finita. Sono necessarie alcune nozioni preliminari.

Definizione 3. (cfr. M. Zamanski [4]). Siano X, Y spazi metrici e $\{T_n\}$ una successione di trasformazioni da X in Y.

a) Si dice che le T_n sono « *puntualmente equicontinue in* $x_0 \in X$ » se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U di x_0 tale che, se $x \in U$,

$$d(T_n(x), T_n(x_0)) < \varepsilon$$

qualunque sia l'intero positivo n.

b) Si dice che le T_n sono *puntualmente equicontinue* in X se lo sono in ogni $x \in X$.

Osservazione 1. Se $\{T_n\}$ converge uniformemente ad una trasformazione continua T, allora le T_n sono *puntualmente equicontinue* in X.

Osservazione 2. Se le T_n sono *equicontinue* sono anche *puntualmente equicontinue*.

Osservazione 3. Siano T e T_n continue. Se, per ogni $x \in X$, la successione numerica $\{d(T_n(x), T(x))\}$ è non crescente e converge a zero, allora le T_n sono *puntualmente equicontinue in* X.

Dimostrazione. Siano $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Esiste $\bar{n}$ tale che

$$d(T_{\bar{n}}(x_0), T(x_0)) < \varepsilon .$$

Si può inoltre trovare un intorno U di x_0 in modo che, per qualunque $x \in U$, si abbia

$$d(T_{\bar{n}}(x), T_{\bar{n}}(x_0)) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(T(x), T(x_0)) < \varepsilon .$$

Poiché

$$d(T_n(x), T_n(x_0)) \leq d(T_n(x), T(x)) + d(T(x), T(x_0)) + d(T(x_0), T_n(x_0))$$

e, per $n > \bar{n}$ e $x \in U$, risulta

$$d(T_n(x), T(x)) \leq d(T_{\bar{n}}(x), T(x)) \leq d(T_{\bar{n}}(x), T_{\bar{n}}(x_0)) +$$
$$+ d(T_{\bar{n}}(x_0), T(x_0)) + d(T(x_0), T(x)) < 3\varepsilon$$

e

$$d(T_n(x_0), T(x_0)) \leq d(T_{\bar{n}}(x_0), T(x_0)) < \varepsilon$$

abbiamo

$$d(T_n(x), T_n(x_0)) < 5\varepsilon .$$

Quindi le T_n sono *puntualmente equicontinue in* X. ▮

LEMMA 2. *Sia* $T : X \rightarrow Y$ *una trasformazione continua di uno spazio metrico compatto* X *in uno spazio metrico* Y. *Se* $\{T_n\}$ *è una successione di trasformazioni di* X *in* Y *puntualmente equicontinue e tali che, per ogni* $x \in X$,

$$\lim_n T_n(x) = T(x)$$

allora $\{T_n\}$ *converge uniformemente a* T.

Dimostrazione. Scelto $x \in X$ abbiamo

$$d(T(z), T_n(z)) \leq d(T(z), T(x)) + d(T(x), T_n(x)) + d(T_n(x), T_n(z))$$

qualunque sia $z \in X$. Quindi, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un intorno U_x di x e un intero positivo $n(x)$ tali che

$$d(T(z), T_n(z)) \leq \varepsilon$$

per ogni $n > n(x)$, $z \in U_x$. Chiaramente la famiglia $\{U_x, x \in X\}$ forma un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto esiste un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \cdots, U_{x_k}\}$.

Se $n > \max\{n(x_1), \cdots, n(x_k)\}$ allora

$$d(T_n(z), T(z)) \leq \varepsilon$$

qualunque sia $z \in X$. Quindi $\{T_n\}$ *converge uniformemente* a T. ▮

Si noti che qualora la successione $\{d(T_n(x), T(x))\}$ sia non crescente, per l'*Osservazione 3* dal Lemma 2 segue il Teorema del Dini (cfr. M. Zamanski [5]).

TEOREMA 3. *Sia* X *uno spazio lineare normato a dimensione finita,* $T : X \to X$ *una trasformazione debolmente contrattiva, avente punto fisso* $\xi \in X$. *Se* $\{T_n\}$, *convergente a* T, *è una successione di trasformazioni di* X *in sé, puntualmente equicontinue, allora esiste un intero positivo* $\bar{n}$ *e una successione* $\{x_n\}$ *tale che, per* $n > \bar{n}$, *si ha*

$$T_n(x_n) = x_n \quad e \quad x_n \to \xi.$$

Dimostrazione. Sia S una sfera chiusa di centro ξ e raggio r, $\rho = \max\{d(\xi, T(x)) : x \in S\}$. Si prova, come nella dimostrazione del Teorema 2, che $\{T_n\}$ converge uniformemente a T, in S, ed esiste $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$, $T_n(S) \subset S$.

Poiché, per il Teorema di Brouwer, negli spazi lineari normati di dimensione finita le sfere hanno la proprietà di punto fisso, allora per $n > \bar{n}$, esiste $x_n \in S$, $x_n = T_n(x_n)$. Essendo $\{x_n\}$ compatta si può concludere, per il Lemma 1, che $x_n \to \xi$. ∎

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. F. BONSALL, *Lectures on Some Fixed Point Theorems of Functional Analysis*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, India, 1962, p. 6.

[2] C. KURATOWSKI, *Topologie*, «Monografie Matematiczne», Tom 20 Warszawa, 1958, Vol. I, p. 318.

[3] SAM B. NADLER, *Sequences of Contractions and Fixed Points*, «Pacific Journal of Mathematics», 27, 579–585 (1968).

[4] M. EDELSTEIN, *On Fixed and Periodic Points under Contractive Mappings*, «The Journal of the London Mathematical Society», 37, 74–79 (1962).

[5] M. ZAMANSKI, *Introduction à l'algèbre et l'analyse modernes*, Coll. Univ. de Math., Dunod, Paris 1967, cap. VIII.