Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Constantin Bănică, Octavian Stănăşilă

Problème de Poincaré pour un espace de Stein

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **47** (1969), n.1-2, p. 25–26.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_1-2_25_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Analisi matematica. — *Problème de Poincaré pour un espace de Stein.* Nota di CONSTANTIN BĂNICĂ e OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ, presentata [(*)] dal Corrisp. E. MARTINELLI.

RIASSUNTO. — Estendendo un risultato di J. P. Serre, si dimostra che ogni funzione meromorfa su uno spazio di Stein ridotto è il quoziente di due funzioni olomorfe.

Dans cette note on demontre que toute section méromorphe sur un espace de Stein réduit est le quotient de deux sections holomorphes. La démonstration est similaire à celle du cas des variétés, avec quelques précautions en ce qui concerne la présence des diviseurs de zéro.

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace de Stein. Pour tout ouvert U de X, on considère le système multiplicatif fermé $S_U = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid$ le gèrme f_x est un non diviseur de zéro dans l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$, quel que soit $x \in U\}$. Il est facile de voir que l'association $U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_X)_{S_U}$ (l'anneau de fractions de l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ par rapport à S_U) définit un préfaisceau; le faisceau associé est noté par M et s'appelle le faisceau de gèrmes de sections méromorphes sur X. Si $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et le gèrme f_x est non diviseur de zéro dans le point $x \in U$, alors l'application de multiplication par $f\, \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ est injective dans x et comme le faisceau $\mathcal{O}_X$ est cohérent, elle reste injective sur un voisinage $V \subset U$ de x; il résulte alors immédiatement que M_x s'identifie de manière naturelle à l'anneau total de fractions de $\mathcal{O}_{X,x}$. Si l'espace $(X, \mathcal{O}_X)$ est réduit, alors on retrouve la construction de [5], page 88 et il est facile de voir que dans ce cas, $S_U = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid f$ ne s'annulle sur aucun ouvert non vide de $U\}$. On a l'inclusion $\mathcal{O} \subset M$ et pour tout nombre fini de sections méromorphes $m_1, \cdots, m_r$, le faisceau des relations $R(m_1, \cdots, m_r)$ est de type fini (car localement, $m_i = f_i/g_i$ avec f_i, g_i holomorphes et on a $R(m_1, \cdots, m_r) = R(f_1, \cdots, f_r)$), donc tout sous-faisceau de type fini de M est cohérent. Mentionons de même que si $\mathfrak{F}$ est un faisceau cohérent sur X, alors $\Gamma(X, \mathfrak{F})$ a une structure d'espace de Fréchet [2] et si sur la fibre $\mathfrak{F}_x$ on considère la topologie canonique [3], alors l'application naturelle $\Gamma(X, \mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}_x$ est continue.

THÉORÈME. - *Si* $(X, \mathcal{O}_X)$ *est un espace de Stein réduit, alors toute section méromorphe* $m \in \Gamma(X, M)$ *est de la forme* $m = f/g$, *avec* $f, g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ $(g \in S_X)$.

Démonstration. - Soient $m \in \Gamma(X, M)$ et $\mathfrak{J} = \mathrm{Ann}(\mathcal{O} + m\mathcal{O}/\mathcal{O})$. Comme $\mathcal{O} + m\mathcal{O}$ est un sous-faisceau de type fini de M, il est cohérent, donc $\mathfrak{J}$ est un Idéal cohérent de $\mathcal{O}$. On a ensuite $\mathfrak{J} = \{f \in \mathcal{O} \mid fm \in \mathcal{O}\}$ et $\mathrm{Supp}\, \mathfrak{J} = X$ et, de plus, $\{x \in X \mid \mathfrak{J}_x = \mathcal{O}_{X,x}\}$ est un ouvert dense de X. Soit A un ensemble

(*) Nella seduta del 12 giugno 1969.

dénombrable, dense de X, tel que $\mathfrak{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}$ pour $x \in A$. Soit $x \in X$; on a une application naturelle

$$\Gamma(X, \mathfrak{I}) \to \mathfrak{I}_x / m_x \mathfrak{I}_x$$

C – linéaire et continue ($\mathfrak{I}_x / m_x \mathfrak{I}_x$ est un $\mathbf{C} = \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ – espace vectoriel de dimension finie, et la topologie induite par la topologie canonique de $\mathfrak{I}_x$ est séparée, car l'idéal $m_x \mathfrak{I}_x$ est fermé, dans $\mathcal{O}_{X,x}$). On montre maintenant que l'application ci–dessus est surjective. Soit $s \in \mathfrak{I}_x$; du théorème A, il existe $s_1, \cdots, s_r \in \Gamma(X, \mathfrak{I})$ et $\varphi_1, \cdots, \varphi_r \in \mathcal{O}_{X,x}$, tel que $s = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i s_{i,x}$ ($s_{i,x}$ –le gèrme de s_i dans le point x). On a $s = (\Sigma \varphi_i(x) s_i)_x + \Sigma (\varphi_i - \varphi_i(x)) s_{i,x}$ (où on a noté par $\varphi_i(x) \in \mathbf{C}$ la valeur de la fonction φ_i dans le point x), donc $s = (\Sigma \varphi_i(x) s_i)_x$, modulo $m_x \mathfrak{I}_x$. La surjectivité est démontrée. Si $\mathfrak{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}$, alors $\mathfrak{I}_x / m_x \mathfrak{I}_x \simeq \mathbf{C}$ et l'application $\Gamma(X, \mathfrak{I}) \to \mathbf{C}$ associe à chaque section sa valeur dans x.

L'ensemble $D_x = \{s \in \Gamma(X, \mathfrak{I}) / s_x \notin m_x \mathfrak{I}_x\}$ est un ouvert dense de $\Gamma(X, \mathfrak{I})$ et conformément au théorème de Baire, $\bigcap_{x \in A} D_x$ est non vide. Soit alors $g \in \bigcap_{x \in A} D_x$ Conformément aux choix faits on a $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$ et, de plus, $gm = f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Il résulte alors que $g \in S_X$ et que $m = f/g$.

Le théorème est démontré.

Remarque. – On a utilisé seulement le fait que l'espace X vérifie le théorème A.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. CARTAN, *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, «Coll. de Bruxelles», 41–55 (1953).

[2] J. FRAENKEL, *Séminaire d'Analyse sur les théorèmes A et B*. Strassbourg 1964–1965.

[3] M. JURCHESCU, *On the canonical topology of an analytic algebra and of an analytic module*. «Bull. de la Soc. Math. de France», 93, 129–153 (1965).

[4] J. P. SERRE, *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein*, «Coll. de Bruxelles», 57–68 (1953).

[5] R. NARASIMHAN, *Introduction to the theory of analytic spaces*, Springer–Verlag 1966.