
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FRANCESCO GIACOMO TRICOMI

**Sulla somma delle inverse delle terze e quinte
potenze dei numeri naturali**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 47 (1969), n.1-2, p. 16-18.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_1-2_16_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_1-2_16_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sulla somma delle inverse delle terze e quinte potenze dei numeri naturali.* Nota (*) del Socio FRANCESCO GIACOMO TRICOMI.

SUMMARY. — It will be shown how the rather mysterious sums indicated in the title — which seem to be never put in relation with any other mathematical object — can be put in a very simple way, in connection with the integral and the derivative of an old, transcendental function from elastostatics.

1. È generalmente noto che le serie formate con le inverse delle p -esime potenze ($p = 2, 3, 4, \dots$) dei numeri naturali:

$$S_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

hanno caratteri completamente diversi secondo che p è pari o dispari. Mentre nel primo caso la loro sommazione è un problema piuttosto elementare e si ha

$$S_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{2(2n)!} (2\pi)^{2n}$$

dove i B_{2n} sono i numeri di Bernoulli; nel caso dell'esponente dispari poco o nulla si sa al riguardo e non mi risulta che tali somme siano state finora poste in relazione con alcun altro oggetto matematico.

Per questa ragione mi sembra che valga la pena di far conoscere come le prime due di tali somme S_3 e S_5 possano mettersi in semplicissima connessione con l'integrale e la derivata di una certa funzione trascendente $f_2(x)$ da tempo presentatasi in elastostatica o, più esattamente, con la funzione $F(x) = f_2(1/x)$.

2. La funzione cui si è alluso si è presentata nello studio della torsione di una barra elastica a sezione rettangolare e della trazione delle corrispondenti molle elicoidali. Essa suole indicarsi ⁽¹⁾ con $f_2(x)$ ed è rappresentata dalla seguente, rapidamente convergente serie di funzioni iperboliche

$$(1) \quad f_2(x) = 16 \left(\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5 x} \sum_n' \frac{1}{n^5} \operatorname{Th} \frac{n\pi x}{2} \right)$$

dove l'apice apposto al sommatorio sta a indicare (come anche nel seguito) che la somma è estesa a tutti i valori *dispari*: 1, 3, 5, ... dell'indice (o degli indici).

(*) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1969.

(1) Vedi per esempio l'Articolo *Elastostatik* di J. W. GECKELER in « Handbuch der Physik » Bd. 6, S. 150-153 (Berlin, Springer, 1928).

In epoca recente l'utilizzazione di questa funzione nel calcolo delle molle ⁽²⁾ mi ha indotto a sospettare che, *nel campo reale*, essa non doveva avere un comportamento molto diverso da quello del prodotto di una costante per la funzione razionale $x^2/(1+x^2)$; ciò che mi ha suggerito di considerare anche la funzione

$$(2) \quad \varphi(x) = \frac{f_2(x)}{x^2/(1+x^2)},$$

che effettivamente si è rivelata quasi costante (ai fini tecnici) in quanto oscilla fra 4,5 circa (esattamente 4,49846) e 5 più $1/3$.

A questo risultato si giunge osservando che, servendosi del noto sviluppo della tangente iperbolica in serie di funzioni razionali:

$$(3) \quad \operatorname{Th} \frac{\pi z}{2} = \frac{4z}{\pi} \sum'_m \frac{1}{m^2 + z^2}$$

e di altri accorgimenti, la funzione φ si può rappresentare con la serie doppia

$$(4) \quad \varphi(x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^6 \sum'_{m,n} \frac{1+x^2}{m^2 n^2 (m^2 + n^2 x^2)}$$

che, fuori dell'origine, è derivabile termine a termine, conducendo all'uguaglianza

$$(5) \quad \varphi'(x) = 2x \left(\frac{4}{\pi}\right)^6 \sum'_{m,n} \frac{(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)^2(x^4 - 1)}{m^2 n^2 (m^2 + n^2 x^2)^2 (n^2 + m^2 x^2)^2}$$

che permette di stabilir subito il segno di $\varphi'(x)$. Giova inoltre ricordare che la funzione $\varphi(x)$ gode della fondamentale proprietà espressa dalla formula

$$(6) \quad \varphi(x) = \varphi(1/x)$$

cui corrisponde, per la funzione F , la formula

$$(6') \quad F(1/x) = x^2 F(x).$$

3. La connessione tra la funzione $F(x)$ e la somma S_3 delle inverse delle terze potenze di numeri naturali o, più esattamente (in un primo tempo), con la somma S'_3 delle inverse delle terze potenze dei numeri *dispari*, si evidenzia calcolando l'integrale fra 0 ed ∞ della funzione $F(x) = f_2(1/x)$, che in virtù della (6') risulta uguale al doppio dello stesso integrale tra i limiti 0 ed 1. Precisamente dalla (4), tenendo conto che $F(x)$ coincide col rapporto fra $\varphi(x)$ e $1+x^2$, con una lecita integrazione termine a termine, si ha

$$\int_0^{\infty} F(x) dx = 2 \int_0^1 F(x) dx = \left(\frac{4}{\pi}\right)^6 \sum'_{m,n} \frac{1}{m^3 n^3} \left[\operatorname{arctg} \frac{nx}{m} \right]_0^{\infty}$$

onde immediatamente segue

$$\int_0^1 F(x) dx = \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum'_{m,n} \frac{1}{m^3 n^3} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 S'_3.$$

(2) F. G. TRICOMI, *Sulle molle elicoidali a sezione rettangolare*. Atti Accad. Scienze Torino, 103 (1968-69).

Ma, come immediatamente si vede separando i termini pari dai termini dispari di S_3 , è

$$(7) \quad S'_3 = \frac{7}{8} S_3;$$

quindi in definitiva si ha

$$(8) \quad \int_0^1 F(x) dx = \frac{784}{\pi^5} S_3^2.$$

4. La connessione con la somma S_5 delle inverse delle quinte potenze si evidenzia calcolando la derivata o, meglio, le semiderivate sinistra e destra della funzione $F(x)$ nell'origine, per lo che non si può certo partire dalla (5), essendo detto punto una singolarità di tipo assai elevato della funzione in esame ⁽³⁾. Allo scopo indicato occorre invece servirsi del relativo rapporto incrementale che, partendo dalla (1) può scriversi

$$F(x) = 16 \left(\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} x \sum'_m \frac{1}{m^5} \operatorname{Th} \frac{m\pi}{2x} \right),$$

è dato dalla formula

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = - \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 \sum'_m \frac{1}{m^5} \operatorname{Th} \frac{m\pi}{2x}.$$

Il passaggio al limite per $x \rightarrow 0$ non offre alcuna difficoltà perché la serie è visibilmente uniformemente convergente (nel campo reale). Solo bisogna stare attenti a distinguere il caso di $x > 0$, in cui la tangente iperbolica tende a $+1$, dal caso $x < 0$ in cui essa tende invece a -1 . Conseguentemente si ha senz'altro, con ovvie notazioni,

$$F'(-0) = -F'(0) = \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 \sum'_m \frac{1}{m^5} = \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 S'_5.$$

Ma in modo del tutto analogo alla (7) si trova che è

$$(9) \quad S'_5 = \frac{31}{32} S_5;$$

dunque in definitiva si ha

$$(10) \quad F'(-0) = -F'(0) = \frac{31 \cdot 32}{\pi^5} S_5 = \frac{992}{\pi^5} S_5.$$

Non credo che le precedenti formule permettano di dire che si siano finalmente sommate le serie S_3 e S_5 ma tuttavia ritengo che, stante la difficoltà del problema, esse meritavano di esser fatte conoscere.

(3) Invero, come subito si scorge dalla (4), le funzioni φ ed F hanno un insieme di poli ovunque denso sull'asse immaginario. Precisamente hanno come poli tutti i punti $x = \pm i m/n$, con m ed n interi dispari qualsiasi (nel caso di φ , con $m \neq n$).