Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tino Zeuli

Sopra alcune generalizzazioni di un teorema di Poincaré in magnetofluidodinamica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.5, p. 561–568.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_5_561_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Magnetofluidodinamica. — *Sopra alcune generalizzazioni di un teorema di Poincarè in magnetofluidodinamica.* Nota di TINO ZEULI, presentata (*) dal Corrisp. E. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — Noted bounds are given in magnetohydrodynamics, for the angular velocity of a rotating and in relative equilibrium fluid mass, from which follow some results given by Poincaré and Armellini.

1. In questa Nota prendo in considerazione le equazioni di equilibrio relativo di una massa gassosa di alta conduttività elettrica uniformemente rotante intorno ad un asse e soggetta ad un campo magnetico uniforme diretto secondo l'asse di rotazione.

Poiché sussiste notoriamente la simmetria intorno all'asse di rotazione ed inoltre rispetto al piano equatoriale perpendicolare allo stesso asse, supposto il gas in equilibrio politropico, riduco la questione alla risoluzione di due equazioni differenziali del 2° ordine in cui sono incognite la densità ρ del gas ed una funzione Φ da cui dipendono le componenti radiale ed assiale del campo magnetico indotto.

Nell'ipotesi che il campo magnetico indotto sia di intensità sufficientemente piccola in confronto di quella del campo magnetico esterno riesco ad ottenere un'equazione differenziale del 2° ordine, non lineare, in cui è incognita la sola densità ρ, e che può essere considerata una generalizzazione dell'equazione di Emden dell'equilibrio stellare.

Questa equazione che definisce le superfici isobariche, e quindi anche la superficie esterna, dove la pressione e la densità si annullano, non è integrabile, ma da essa ho potuto dedurre delle limitazioni notevoli per la velocità angolare ω, che generalizzano quella ben nota di Poincaré [1], e che per campi magnetici indotti non molto intensi, risultano più basse del limite superiore stabilito da Poincaré.

Dalla stessa equazione inoltre, generalizzando un risultato di Armellini [2], ottengo per la velocità angolare un altro limite superiore, valido anche per masse gassose anulari, che dipende dalla densità massima che si ha in un determinato punto del piano equatoriale, il quale punto coincide col centro se la massa gassosa è globulare. In assenza di campo magnetico questo limite superiore si riduce a quello determinato da Armellini.

(*) Nella seduta del 10 maggio 1969.

(1) H. POINCARÉ, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Chap. I, p. 11. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

(2) G. ARMELLINI, *Sopra un limite inferiore della densità massima di una massa gassosa ruotante*, « Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », Serie VIII, vol. XIX, fasc. 3-4, 1955, pp. 102-107.

2. Consideriamo un fluido gassoso di alta conduttività elettrica uniformemente rotante intorno ad un asse z con velocità angolare ω, e soggetto ad un campo magnetico uniforme $\mathbf{H}_0$ diretto secondo l'asse di rotazione. In questo caso, come è noto, la configurazione di equilibrio relativo della massa fluida è di rivoluzione intorno al suo asse e la distribuzione del campo magnetico, della densità e della pressione è necessariamente a simmetria assiale [3]. Inoltre per un teorema di Gylden la massa fluida ammette un piano di simmetria, ortogonale all'asse di rotazione, che assumeremo come piano xy.

Indicando con r la distanza di una particella fluida dall'asse e con z la sua quota rispetto al piano equatoriale xy, l'equazione vettoriale di equilibrio relativo risulta

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}\wedge\mathbf{H} + \frac{1}{2}\,\omega^2\operatorname{grad} r^2 + \operatorname{grad}\mathrm{U}, \tag{1}$$

dove p è la pressione, ρ la densità, $\mathbf{H}$ il campo magnetico (risultante del campo magnetico esterno $\mathbf{H}_0$ e di quello indotto $\boldsymbol{h}$), μ è la permeabilità magnetica del fluido, ed infine U il potenziale newtoniano delle forze di mutua attrazione delle particelle.

D'altra parte, se la conduttività elettrica del fluido è tanto grande da poterla ritenere infinita, l'equazione del campo magnetico si riduce alla

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{H}) = 0, \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità delle particelle fluide. Dalla (2) segue che dovrà esistere una funzione $\Phi(r, z)$, tale che

$$\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{H} = \operatorname{grad}\Phi. \tag{3}$$

Se supponiamo ancora che la componente trasversa del campo magnetico sia nulla, che cioè il campo magnetico sia *poloidale*, indichiamo con H_r, H_z le sue componenti radiale ed assiale, e con φ l'anomalia, abbiamo $\boldsymbol{v} = \omega r^2 \operatorname{grad}\varphi$, la (3) porge le equazioni scalari

$$\omega r\,\mathrm{H}_z = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad , \quad \omega r\,\mathrm{H}_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,. \tag{4}$$

La condizione

$$\operatorname{div}\mathbf{H} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{H}_r) + \frac{\partial\mathrm{H}_z}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

risulta così identicamente verificata.

Ponendo

$$\nabla_2\Phi = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{6}$$

(3) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Cap. III, § 2, n. 1, p. 125. Edizioni Cremonese. Roma, 1966.

dalle (4) si ricava

(7) $$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{1}{\omega} \nabla_2 \Phi \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

e quindi

(8) $$(\operatorname{rot} \mathbf{H}) \wedge \mathbf{H} = -\frac{1}{\omega^2 r^2} \nabla_2 \Phi \cdot \operatorname{grad} \Phi.$$

Allora, se la pressione p è funzione soltanto della densità, $p = p(\rho)$, e poniamo

(9) $$\mathcal{S}(\rho) = \int \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$

l'equazione (1) dell'equilibrio relativo diventa

(10) $$\operatorname{grad} \left\{ \mathcal{S}(\rho) - U - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right\} + \frac{\mu}{\omega^2 r^2 \rho} \nabla_2 \Phi \cdot \operatorname{grad} \Phi = 0.$$

Prendendo il rotore di ambo i membri di questa equazione si deduce

(11) $$\operatorname{grad} \left(\frac{\nabla_2 \Phi}{r^2 \rho} \right) \wedge \operatorname{grad} \Phi = 0$$

e quindi l'espressione $\nabla_2 \Phi/(r^2 \rho)$ sarà una funzione di Φ.

Ponendo allora

(12) $$\nabla_2 \Phi = -\frac{\omega^2}{\mu} r^2 \rho \frac{dF(\Phi)}{d\Phi}$$

l'equazione (10) diventa

(13) $$\operatorname{grad} \left\{ \mathcal{S}(\rho) - U - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 - F(\Phi) \right\} = 0$$

che risulta ora integrabile. Per eliminare il potenziale U, poiché per l'equazione di Poisson è $\Delta_2 U = -4 \pi f \rho$, essendo f la costante di attrazione universale, prenderemo la divergenza di ambo i membri della (13). Si ha in tal modo l'equazione

(14) $$\nabla_2 \{ \mathcal{S}(\rho) - F(\Phi) \} + 4 \pi f \rho = 2 \omega^2,$$

alla quale va associata la (12). In entrambe compare la funzione arbitraria $F(\Phi)$. Scelta questa funzione e nota la legge di variazione della pressione con la densità, le (13) e (14) costituiscono due equazioni nelle due incognite ρ e Φ, la seconda delle quali, in virtù delle (4), è la funzione del campo magnetico.

Osserviamo che se, come è lecito, si trascura la corrente di spostamento in confronto della corrente di conduzione $\mathbf{I}$, la prima delle equazioni di Maxwell diventa $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{I}$. Allora per la (7) e la (12) si ha

(15) $$\mathbf{I} = \frac{\omega}{\mu} r^2 \rho \frac{dF(\Phi)}{d\Phi} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\mu} \frac{dF}{d\Phi} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Questa dà il significato della funzione $F(\Phi)$, e mostra che la densità di corrente è diretta trasversalmente nel senso in cui si muovono le particelle fluide.

3. Per lo scopo che abbiamo in mente supponiamo che si tratti di un fluido politropico e quindi

$$p = k\rho^{\gamma} \tag{16}$$

con k e γ costanti positive con $\gamma > 1$. Nel caso di un gas in equilibrio adiabatico è, come è noto, $\gamma \simeq 1{,}41$.

Supponiamo inoltre che la funzione F sia lineare in Φ, e precisamente

$$F = h_0\, \Phi, \tag{17}$$

con h_0 costante positiva. In questo caso la (15) porge

$$\mathbf{I} = h_0 \frac{\omega}{\mu} r^2 \rho \operatorname{grad} \varphi = \frac{h_0}{\mu} \rho \boldsymbol{v} \tag{18}$$

e le equazioni (14) e (12) diventano

$$\Delta_2 \left\{ \frac{k\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} - h_0 \Phi \right\} + 4\,\pi f \rho = 2\,\omega^2, \tag{19}$$

$$\nabla_2 \Phi + h_0 \frac{\omega^2}{\mu} r^2 \rho = 0. \tag{20}$$

Quest'ultima equazione si può scrivere anche

$$\Delta_2 \Phi - \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + h_0 \frac{\omega^2}{\mu} r^2 \rho = 0,$$

cioè, per la prima delle (4), ed osservando che $H_z = H_0 + h_z$, essendo h_z la componente assiale del campo magnetico indotto, si ha

$$\Delta_2 \Phi - 2\,\omega H_0 \left(1 + \frac{h_z}{H_0}\right) + \frac{h_0\, \omega^2}{\mu} r^2 \rho = 0. \tag{21}$$

Ora, se il campo magnetico indotto è sufficientemente piccolo in confronto del campo magnetico applicato H_0, in modo che il rapporto h_z/H_0 sia trascurabile in confronto dell'unità, la (21) diventa più semplicemente

$$\Delta_2 \Phi + \frac{h_0\, \omega^2}{\mu} r^2 \rho = 2\,\omega H_0. \tag{22}$$

Sostituendo nella (19) si ha l'equazione che volevamo stabilire

$$\frac{k\gamma}{\gamma - 1} \Delta_2 \rho^{\gamma-1} + \left(4\,\pi f + \frac{h_0^2\, \omega^2}{\mu} r^2\right) \rho = 2\,(\omega^2 + \omega h_0\, H_0) \tag{23}$$

nella quale è incognita la sola densità ρ.

Ponendo

$$u = \rho^{\gamma-1} \tag{24}$$

la (23) si può scrivere anche

$$\frac{k\gamma}{\gamma - 1} \Delta_2 u + \left(4\,\pi f + \frac{h_0^2\, \omega^2}{\mu} r^2\right) u^{1/(\gamma-1)} = 2\,(\omega^2 + \omega h_0\, H_0). \tag{25}$$

4. Ciò premesso, se integriamo ambo i membri della (25) rispetto a tutto il volume S occupato dalla massa fluida rotante, e indichiamo con σ la superficie che limita questo volume e con n la normale *esterna*, abbiamo

$$\frac{k\gamma}{\gamma - 1}\int_\sigma \frac{du}{dn}\,d\sigma + \left\{4\pi f\int_S \rho\,dS + \frac{h_0^2\,\omega^2}{\mu}\int_S r^2\,\rho\,dS\right\} = 2\,(\omega^2 + \omega h_0\,H_0)\,S. \tag{26}$$

Ora, affinché vi sia equilibrio della massa fluida, senza lancio di materia all'esterno, sulla superficie σ deve essere necessariamente

$$\frac{dp}{dn} < 0, \qquad \text{e quindi anche} \quad \frac{d\rho}{dn} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{du}{dn} < 0.$$

Allora la relazione (26) mostra che deve essere necessariamente

$$4\pi f\int_S \rho\,dS + \frac{h_0^2\,\omega^2}{\mu}\int_S r^2\,\rho\,dS - 2\,(\omega^2 + \omega h_0\,H_0)\,S > 0. \tag{27}$$

Ponendo

$$\rho_m = \frac{1}{S}\int_S \rho\,dS \quad ; \quad R_i^2 = \int_S r^2\,\rho\,dS \Big/ \int_S \rho\,dS, \tag{28}$$

dove ρ_m è la *densità media* della massa fluida, ed R_i^2 è il quadrato del *raggio d'inerzia* rispetto all'asse di rotazione, la disuguaglianza (27) si può scrivere

$$\left(1 - \frac{h_0^2\,R_i^2}{2\,\mu}\,\rho_m\right)\omega^2 + h_0\,H_0\,\omega - 2\,\pi f \rho_m < 0. \tag{29}$$

Trattandosi di campi magnetici indotti non molto intensi, e quindi di correnti indotte di piccola intensità, la costante h_0 sarà molto piccola. Supporremo inoltre che si tratti di masse gassose non eccessivamente concentrate, in modo che la densità media ρ_m sia sufficientemente piccola da poter ritenere positivo il coefficiente $1 - h_0^2\,R_i^2\,\rho_m/(2\,\mu)$, tale cioè che sia

$$h_0 < \frac{1}{R_i}\sqrt{\frac{2\,\mu}{\rho_m}}\,. \tag{30}$$

Allora il discriminante δ del 1° membro della (29) è positivo:

$$\delta = h_0^2\,H_0^2 + 8\,\pi f \rho_m\left(1 - \frac{h_0^2\,R_i^2}{2\,\mu}\,\rho_m\right) > 0. \tag{31}$$

Gli zeri ω_1 ed ω_2 del primo membro della (29) sono uno negativo (ω_1), e l'altro positivo. La disuguaglianza (29) è perciò verificata per $\omega < \omega_2$, cioè per

$$\omega < \frac{-h_0\,H_0 + \sqrt{h_0^2\,H_0^2 + 8\,\pi f \rho_m\left(1 - \dfrac{h_0^2\,R_i^2}{2\,\mu}\,\rho_m\right)}}{2\left(1 - \dfrac{h_0^2\,R_i^2}{2\,\mu}\,\rho_m\right)}\,. \tag{32}$$

Questa stabilisce un limite superiore per la velocità angolare di rotazione per la massa fluida ruotante in equilibrio relativo. In assenza di campo magnetico, e quindi di corrente di conduzione, è $h_0 = 0$ e la (32) diventa

$$\omega < \sqrt{2\pi f \rho_m}, \qquad \text{cioè} \quad \omega^2 < 2\pi f \rho_m, \tag{33}$$

che è la limitazione di Poincaré.

È opportuno ora vedere quando è $\omega < \sqrt{2\pi f \rho_m}$, quando cioè è verificata la diseguaglianza

$$-h_0 H_0 + \sqrt{\delta} < 2\left(1 - \frac{h_0^2 R_i^2}{2\mu}\rho_m\right)\sqrt{2\pi f \rho_m}. \tag{34}$$

Supposto che questa sia verificata si deduce

$$\sqrt{\delta} < 2\left(1 - \frac{h_0^2 R_i^2}{2\mu}\rho_m\right)\sqrt{2\pi f \rho_m}.$$

Ambedue i membri di questa relazione sono positivi, perciò elevando a quadrato e semplificando si ottiene la disuguaglianza

$$h_0 < \frac{2\mu H_0}{R_i^2 \rho_m \sqrt{2\pi f \rho_m}}. \tag{35}$$

Dunque, *se la costante h_0 è minore della più piccola delle due quantità*

$$\frac{1}{R_i}\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_m}}, \qquad \frac{2\mu H_0}{R_i^2 \rho_m \sqrt{2\pi f \rho_m}}$$

allora il campo magnetico agisce nel senso di abbassare il limite superiore critico della velocità angolare di rotazione della massa fluida al disotto del limite di Poincaré.

Se addirittura supponiamo che la costante h_0 sia sufficientemente piccola da poter trascurare nella (29), e quindi nella (32), il termine $h_0^2 R_i^2 \rho_m/(2\mu)$, in confronto dell'unità, abbiamo più semplicemente

$$\omega < -\frac{1}{2} h_0 H_0 + \sqrt{\frac{1}{4} h_0^2 H_0^2 + 2\pi f \rho_m}, \tag{36}$$

il cui secondo membro è ovviamente minore di $\sqrt{2\pi f \rho_m}$.

5. Per stabilire ora un'altra notevole limitazione per la velocità angolare di rotazione della massa fluida, ritorniamo all'equazione (25) la quale si può scrivere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\gamma - 1}{k\gamma}\left(4\pi f + \frac{h_0^2 \omega^2}{\mu} r^2\right) u^{1/(\gamma-1)} = \tag{37}$$

$$= \frac{2(\gamma - 1)}{k\gamma}(\omega^2 + \omega h_0 H_0).$$

Integrando questa equazione si hanno le superfici di eguale densità e quindi anche la superficie esterna della massa fluida corrispondente al valore $p = 0$, e quindi anche $\rho = 0$, oppure $u = 0$.

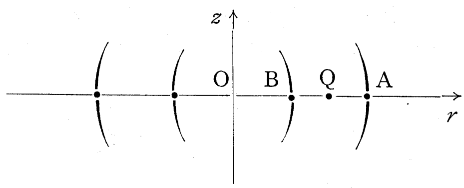
Essendo il piano $z = 0$ un piano di simmetria (piano equatoriale) se ci muoviamo lungo una parallela all'asse z la densità andrà crescendo col diminuire della quota z, ed avrà una massimo nel punto di intersezione col piano equatoriale. Avremo quindi.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=0} < 0 \tag{38}$$

e pertanto in tutti i punti del piano equatoriale interni alla massa gassosa dalla (37) segue la disuguaglianza

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_{z=0} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{z=0} + \frac{\gamma - 1}{k\gamma}\left(4\pi f + \frac{h_0^2\,\omega^2\,r^2}{\mu}\right)(u^{1/(\gamma-1)})_{z=0} - \\ - \frac{2(\gamma-1)}{k\gamma}(\omega^2 + \omega h_0\,H_0) > 0. \tag{39}$$

Ciò premesso sia A un punto dell'equatore esterno, dove $u = 0$ e muoviamoci radialmente da A verso il centro, sempre nel piano equatoriale. Se la massa gassosa ha forma anulare, la densità e quindi la u diverranno dapprima positive, per poi annullarsi nuovamente quando si raggiunge il



bordo interno della regione equatoriale in un punto B. Vi sarà pertanto un punto Q, compreso fra A e B, in cui è $(\partial u/\partial r)_{z=0} = 0$. Siano r_0, R i valori di r corrispondenti ai punti Q, A ($r_0 < R$); allora in tutto l'intervallo dal punto A al punto Q, cioè per $r_0 < r < R$, sarà $(\partial u/\partial r)_{z=0} < 0$; salvo nel punto Q in cui è $(\partial u/\partial r)_{z=0} = 0$.

Nel caso di masse fluide globulari per ragioni di simmetria il massimo di u si ha nel centro O ($r_0 = 0$).

Allora, essendo $(\partial u/\partial r)_{z=0} < 0$, in tutto l'intervallo (r_0, R), a più forte ragione avremo

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_{z=0} + \frac{\gamma - 1}{k\gamma}\left(4\pi f + \frac{h_0^2\,\omega^2\,R^2}{\mu}\right)(u^{1/(\gamma-1)})_{z=0} - \\ - \frac{2(\gamma-1)}{k\gamma}(\omega^2 + \omega h_0\,H_0) > 0. \tag{40}$$

Moltiplicando ambo i membri di questa relazione per $(\partial u/\partial r)_{z=0}$ la disuguaglianza cambierà di verso. Integrando quindi rispetto ad r in tutto l'intervallo (r_0, R), ed osservando che

$$u = 0, \qquad \text{per} \quad r = R \quad ; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{z=0} = 0, \qquad \text{per} \quad r = r_0,$$

avremo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2_{\substack{z=0\\ r=R}} - \frac{\gamma - 1}{k\gamma}\left(4\pi f + \frac{h_0^2\,\omega^2\,R^2}{\mu}\right)\frac{\gamma - 1}{\gamma}(u^{\gamma/(\gamma-1)})_{\substack{z=0\\ r=R}} + \\ + \frac{2(\gamma-1)}{k\gamma}(\omega^2 + \omega h_0\,H_0)\,(u)_{\substack{z=0\\ r=R}} < 0.$$

Scrivendo questa diseguaglianza nella forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2_{\substack{z=0\\ r=R}} - \frac{2(\gamma-1)}{k\gamma}\left\{\left(2\pi f + \frac{h_0^2\,\omega^2\,R^2}{2\mu}\right)\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(u^{\gamma/(\gamma-1)}\right)_{\substack{z=0\\ r=R}} - \right.$$

$$\left. -\left(\omega^2+\omega h_0\,H_0\right)(u)_{\substack{z=0\\ r=R}}\right\} < 0.$$

si deduce che nel punto Q $(r = r_0\,,\, z = 0)$, sarà necessariamente

$$\left(2\pi f + \frac{h_0^2\,\omega^2\,R^2}{2\mu}\right)\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\rho\,(Q) > \omega^2 + \omega h_0\,H_0\,. \tag{41}$$

In una massa gassosa omogenea, elettricamente conduttrice, uniformemente rotante intorno ad un asse e soggetta ad un campo magnetico assiale uniforme, esiste dunque nel piano equatoriale un punto Q (che coincide col centro se la massa è globulare), in cui la densità ρ diventa massima, ed il valore della velocità angolare di rotazione è legato a questo valore della densità dalla disuguaglianza (41). In assenza di campo magnetico $(h_0 = 0)$ essa si riduce alla

$$\omega^2 < 2\pi f\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\rho\,(Q), \tag{42}$$

che è la relazione stabilita da Armellini nella nota citata.

Dalla (41), sotto ipotesi analoghe a quelle formulate nel n. 4, si ricava per ω la limitazione

$$\omega < \frac{-h_0\,H_0 + \sqrt{h_0^2\,H_0^2 + 8\pi f\,\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\,\rho\,(Q)\left[1 - \dfrac{h_0^2\,R^2}{2\mu}\,\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\,\rho\,(Q)\right]}}{2\left[1-\dfrac{h_0^2\,R^2}{2\mu}\,\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\,\rho\,(Q)\right]}, \tag{43}$$

che è analoga alla (32), dove figura la densità media ρ_m invece della densità massima.

In particolare, nel caso in cui il termine $\dfrac{h_0^2\,R^2}{2\mu}\,\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\,\rho\,(Q)$ è trascurabile in confronto dell'unità si ha la limitazione più semplice

$$\omega < -\frac{1}{2}\,h_0\,H_0 + \sqrt{\frac{1}{4}\,h_0^2\,H_0^2 + 2\pi f\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\rho\,(Q)} \tag{44}$$

e confrontando colla (36) si ha che la (44) fornisce per ω un limite superiore più grande o più piccolo di quello fornito dalla (36), a seconda che è

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\rho\,(Q) > \rho_m, \qquad \text{oppure} \quad \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\rho\,(Q) < \rho_m.$$

Lo stesso avviene per il limite (42) stabilito da Armellini in confronto di quello dato da Poincaré.