
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MICHELE CAPURSO

**Principi di minimo per la soluzione incrementale dei
problemi elastoplastici. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.5, p. 552–560.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_5_552_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Principi di minimo per la soluzione incrementale dei problemi elastoplastici.* Nota II di MICHELE CAPURSO, presentata (*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — In a previous paper a minimum principle has been formulated for the solution of the rate problem in elastic-perfectly plastic solids with regular yield surface.

In this paper such a principle is extended to work-hardening materials with regular yield surface.

The generalisation of the principle for singular yield surfaces, both for elastic-perfectly plastic and for elastic-work-hardening materials, is also given.

Finally it is shown that such principles are intimately related to a recent theorem due to Ceradini.

Nella Nota I del presente lavoro si è dimostrato che la soluzione incrementale di un problema al contorno per un continuo elastico perfettamente plastico equivale a definire l'insieme di spostamenti $\dot{u}_i$ e di distorsioni plastiche $\dot{\lambda}$ che minimizzano, nel sottospazio $\dot{\lambda} \geq 0$, un opportuno funzionale quadratico. Si prende ora in esame il caso dei corpi incrudenti e si dimostrano analoghi principi, generalizzandoli poi al caso dei continui con superficie di snervamento di tipo singolare.

1. Il funzionale che si prende in considerazione per i corpi elastici-incrudenti è fornito dall'espressione:

$$(54) \quad M_i = \int_V \Phi(\dot{\epsilon}_{ij}^e) dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \dot{\lambda}^2 dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i dS \quad (1).$$

Esso cioè risulta variato rispetto al caso del materiale perfettamente plastico (Cfr. (24)) per l'aggiunta dell'integrale:

$$(55) \quad \frac{1}{2} \int_{V_p} h \dot{\lambda}^2 dV$$

positivo per definizione.

In questo caso la parte quadratica di M_i soddisfa sempre la condizione:

$$(56) \quad \int_V \Phi(\dot{\epsilon}_{ij}^e) dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \dot{\lambda}^2 dV > 0$$

e cioè risulta essere sempre definita positiva anche se espressa in termini di variabili $\dot{u}_i, \dot{\lambda}$ per l'aggiunta dell'integrale (55).

(*) Nella seduta del 19 aprile 1969.

(1) La numerazione delle formule prosegue quella della Nota I.

Ci si proponga ora al solito di determinare le proprietà geometriche di M_i nell'iperspazio delle variabili $\dot{u}_i, \dot{\lambda}$.

A tal fine se si considerano al solito due insiemi di variabili $\dot{u}_i, \dot{\lambda}$ e $\dot{u}_i^*, \dot{\lambda}^*$ tali che:

$$(57) \quad \dot{u}_i^* = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i, \quad \dot{\lambda}^* = \dot{\lambda} + \Delta \dot{\lambda}$$

con $\Delta \dot{u}_i$ e $\Delta \dot{\lambda}$ incrementi finiti delle variabili indipendenti, si ha ancora

$$(58) \quad M_i^* = M_i + \Delta M_i$$

essendo ΔM_i la variazione finita di M_i associata agli incrementi $\Delta \dot{u}_i, \Delta \dot{\lambda}$.

Tenendo presente la (20), è evidente peraltro che risulta:

$$(59) \quad M_i = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \dot{\lambda}^2 dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i dS$$

e quindi anche:

$$(60) \quad M_i^* = M_i + \Delta M_i = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij} + \Delta \dot{\sigma}_{ij}) (\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^e) dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h (\dot{\lambda} + \Delta \dot{\lambda})^2 dV + \\ - \int_V \dot{X}_i (\dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i) dV - \int_{S_p} \dot{p}_i (\dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i) dS.$$

Dal confronto fra (59) e (60) si trae quindi immediatamente:

$$(61) \quad \Delta M_i = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \Delta \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^e) dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h (2 \dot{\lambda} \Delta \dot{\lambda} + \Delta \dot{\lambda}^2) dV + \\ - \int_V \dot{X}_i \Delta \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \Delta \dot{u}_i dS.$$

Operando sul primo degli integrali a secondo membro della (61) la trasformazione consentita dalla relazione:

$$(62) \quad \Delta \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^e$$

si ha ancora:

$$(63) \quad \Delta M_i = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^e dV + \frac{1}{2} \int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e dV + \int_{V_p} h \dot{\lambda} \Delta \dot{\lambda} dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \Delta \dot{\lambda}^2 dV + \\ - \int_V \dot{X}_i \Delta \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \Delta \dot{u}_i dS.$$

D'altra parte poiché dalla (10) risulta:

$$(64) \quad \begin{cases} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} & \text{in } V_e \\ \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} - h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \dot{\lambda} & \text{in } V_p \end{cases}$$

si trae dalla (63):

$$(65) \quad \Delta M_i = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{V_p} \dot{\sigma}_{ij} h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \dot{\lambda} + \frac{1}{2} \int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + \\ + \int_{V_p} h \dot{\lambda} \Delta \dot{\lambda} dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \Delta \dot{\lambda}^2 dV - \int_V \dot{X}_i \Delta \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \Delta \dot{u}_i dS.$$

Tenendo presente peraltro che:

$$(66) \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \dot{f}(\sigma_{ij})$$

la (65) assume la forma definitiva:

$$(67) \quad \Delta M_i = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_V \dot{X}_i \Delta \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \Delta \dot{u}_i dS - \int_{V_p} h (f - \dot{\lambda}) \Delta \dot{\lambda} dV + \\ + \frac{1}{2} \int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \Delta \dot{\lambda}^2 dV$$

e rappresenta così l'espressione ultima della variazione finita che il funzionale M_i subisce a partire dal valore corrispondente ad un punto P qualsiasi di coordinate $\dot{u}_i, \dot{\lambda}$ per effetto degli incrementi finiti $\Delta \dot{u}_i, \Delta \dot{\lambda}$.

Si supponga ora al solito che il punto P suddetto corrisponda alla soluzione reale del problema incrementale elasto-incrudente. In tal caso le $\dot{\sigma}_{ij}$ sono in equilibrio con le azioni esterne $\dot{X}_i, \dot{p}_i$ e si annulla per il principio dei lavori virtuali la quantità:

$$(68) \quad \int_V \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_V \dot{X}_i \Delta \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \Delta \dot{u}_i dS.$$

La (67) diviene quindi:

$$(69) \quad \Delta M_i = - \int_{V_p} h (f - \dot{\lambda}) \Delta \dot{\lambda} dV + \frac{1}{2} \int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \Delta \dot{\lambda}^2 dV.$$

D'altra parte, come già per il caso perfettamente plastico, non tutto il volume V_p alle soglie dello snervamento subisce deformazioni plastiche ma solo una sua aliquota V_{pp} . La restante aliquota V_{pe} torna infatti in campo elastico e si ha:

$$(70) \quad \begin{array}{ll} \dot{f} = \dot{\lambda} > 0 & \text{in } V_{pp} \\ \dot{f} \leq 0 \quad \dot{\lambda} = 0 & \text{in } V_{pe}. \end{array}$$

La prima delle (70) consente quindi di scrivere la (69) nella forma:

$$(71) \quad \Delta M_i = - \int_{V_{pe}} h (f - \dot{\lambda}) \Delta \dot{\lambda} dV + \frac{1}{2} \int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \Delta \dot{\lambda}^2 dV.$$

D'altra parte essendo in V_{pe} $\dot{\lambda} = 0$, è evidente che dovendosi costringere l'analisi al sottospazio $\dot{\lambda} \geq 0$, ivi deve porsi:

$$(72) \quad \Delta \dot{\lambda} \geq 0.$$

Dalla seconda delle (70) risulta peraltro che in V_{pe} si ha:

$$(73) \quad \dot{f} - \dot{\lambda} = \dot{f} \leq 0.$$

Le (72) e (73) dimostrano quindi che, essendo h definita positiva, si ha:

$$(74) \quad \int_{V_{pe}} h (\dot{f} - \dot{\lambda}) \Delta \dot{\lambda} dV \leq 0.$$

D'altra parte, per definizione, risulta:

$$(75) \quad \frac{1}{2} \int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \Delta \dot{\lambda}^2 dV > 0$$

e si deduce quindi dalla (67) che:

$$(76) \quad \Delta M_i > 0$$

per tutte le variazioni dei parametri $\dot{u}_i, \dot{\lambda}$ contenute nel sottospazio $\dot{\lambda} \geq 0$.

La (76) garantisce in questo caso rigorosamente l'unicità della soluzione e consente di dedurre il seguente principio:

TEOREMA III. *Fra tutti gl'insiemi di spostamenti $\dot{u}_i$ definiti in V nel rispetto delle condizioni cinematiche in S_u e di distorsioni plastiche $\dot{\lambda}$ definite positive in V_p , l'insieme corrispondente alla soluzione reale per il corpo elasto-incrudente rende M_i minimo nel sottospazio $\dot{\lambda} \geq 0$.*

Anche in questo caso la soluzione viene ricondotta alla ricerca di un minimo di campo di un funzionale quadratico e può condursi agevolmente sfruttando un semplice metodo iterativo sul quale si riferirà in un prossimo lavoro.

Se tuttavia, particolari leggi di variazione delle azioni esterne consentono di prevedere una modesta influenza dei ritorni elastici, può semplificarsi il problema ponendo al solito in via approssimata:

$$(77) \quad V_{pe} = 0$$

In tale ipotesi la (67) porge:

$$(78) \quad \Delta M_i = \frac{1}{2} \int_V \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} h \Delta \dot{\lambda}^2 dV$$

e si ha pertanto:

$$(79) \quad \Delta M_i > 0$$

per tutte le possibili variazioni dei parametri $\dot{u}, \dot{\lambda}$ senza però alcuna limitazione al segno dei $\dot{\lambda}$.

La soluzione che così si ottiene viene a corrispondere al punto di minimo assoluto di M_i nell'iperspazio di riferimento e può determinarsi risolvendo un ordinario sistema di equazioni lineari ⁽²⁾.

Può quindi enunciarsi infine il principio:

TEOREMA IV. *Fra tutti gli insiemi di spostamento u_i , definiti in V nel rispetto delle condizioni cinematiche in S_u , e di distorsioni plastiche $\dot{\lambda}$ definite in V_p , l'insieme corrispondente alla soluzione del problema, trascurando i ritorni elastici, rende M_i minimo nell'iperspazio di riferimento.*

2. I principi precedentemente enunciati sono stati dimostrati per semplicità nell'ipotesi che la superficie di snervamento del materiale fosse una superficie di tipo regolare rappresentabile con un'unica espressione analitica del tipo:

$$f(\sigma_{ij}) = 0.$$

In generale tuttavia tali teoremi conservano la loro validità anche per materiali con superficie di snervamento singolare rappresentabile cioè attraverso le relazioni:

$$(81) \quad f_\alpha(\sigma_{ij}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Va tenuto presente ovviamente che ai legami costitutivi (4) e (5) per i corpi perfettamente plastici vanno sostituiti questa volta le relazioni:

$$(82) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \sum_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}_\alpha$$

essendo:

$$(83) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_\alpha &= 0 & \text{se } f_\alpha < 0 & \text{ o } f_\alpha = 0 \text{ ed } \dot{f}_\alpha < 0 \\ \dot{\lambda}_\alpha &> 0 & \text{se } f_\alpha &= 0 \text{ ed } \dot{f}_\alpha = 0 \end{aligned}$$

mentre ai legami costitutivi (6) e (7) per i corpi incrudenti si sostituiscono le relazioni:

$$(84) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \sum_\alpha h_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}_\alpha$$

essendo:

$$(85) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_\alpha &= 0 & \text{se } f_\alpha < 0 & \text{ o } f_\alpha = 0 \text{ ed } \dot{f}_\alpha \leq 0 \\ \dot{\lambda}_\alpha &= \dot{f}_\alpha & \text{se } f_\alpha &= 0 \text{ ed } \dot{f}_\alpha > 0 \end{aligned}$$

(2) Tale soluzione approssimata per il corpo elasto-incrudente può peraltro riguardarsi anche come soluzione rigorosa di un corpo a comportamento semplificato che presenti in luogo delle (7) le relazioni

$$(80) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda} &= 0 & \text{se } f < 0 \\ \dot{\lambda} &= \dot{f} & \text{se } f = 0. \end{aligned}$$

In tal senso il numero delle incognite puntuali del problema nei termini precedenti risulta essere dato dalle $(3 + n)$ funzioni:

$$(86) \quad \begin{aligned} \dot{u}_i &= \dot{u}_i(x_j) & (i, j = 1, 2, 3) \\ \dot{\lambda}_\alpha &= \dot{\lambda}_\alpha(x_j) & (\alpha = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Il problema si presenta pertanto negli stessi termini in cui è stato posto nel caso della superficie di snervamento regolare con l'unica variante dell'aumento dei parametri $\dot{u}_i, \dot{\lambda}_\alpha$ che definiscono lo spazio di riferimento dei funzionali M_p e M_i .

L'enunciato dei teoremi e la dimostrazione restano quindi sostanzialmente immutate. Fa eccezione l'espressione (54) di M_i che va generalizzata come segue:

$$(87) \quad M_i = \int_V \Phi(\dot{\varepsilon}_{ij}^e) dV + \frac{1}{2} \sum_\alpha \int_V h_\alpha \dot{\lambda}_\alpha^2 dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i dS.$$

3. I principii formulati precedentemente per i corpi elasto-plastici (Teorema I) ed elasto-incrudenti (Teorema II) assumendo come variabili indipendenti gli spostamenti $\dot{u}_i$ e le distorsioni plastiche $\dot{\lambda}$ ricadono in un classico teorema dimostrato da Ceradini nel 1965⁽³⁾ come principio di massimo vincolato in relazione alle sole variabili indipendenti $\dot{\lambda}$.

Si consideri infatti il funzionale $M_p = M_p(\dot{u}_i, \dot{\lambda})$ espresso dalla (24) per i corpi elasto-plastici:

$$(88) \quad M_p = \int_V \Phi(\dot{\varepsilon}_{ij}^e) dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i dS.$$

Se si pone la limitazione che i parametri $\dot{u}_i, \dot{\lambda}$ diano luogo a situazioni sempre equilibrate, dovrà risultare per il principio dei lavori virtuali:

$$(89) \quad \int_V \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V \dot{X} \Delta \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \Delta \dot{u}_i dS = 0$$

per qualsiasi variazione $\Delta \dot{u}_i$ degli spostamenti $\dot{u}_i$ che dia luogo al sistema congruente di deformazioni $\Delta \dot{\varepsilon}_{ij}$.

L'imposizione della (89) equivale ad istituire dei legami differenziali lineari fra le variabili $\dot{u}_i$ e i parametri $\dot{\lambda}$. Vale a dire che, assegnato un qualsiasi insieme di distorsioni plastiche $\dot{\lambda}$ in V_p le (89) individuano univocamente la distribuzione $\dot{u}_i$ in V nella forma:

$$(90) \quad \dot{u}_i = \dot{u}_i(\dot{X}_i, \dot{p}_i) + \dot{u}_i''(\dot{\lambda})$$

(3) G. CERADINI, *Un principio di massimo per il calcolo dei sistemi elasto-plastici*, Ist. Lombardo Sc. e Lettere 1965.

essendo $\dot{u}_i'$ gli spostamenti relativi alla soluzione perfettamente elastica ed $\dot{u}_i''$ quelli derivanti dal sistema di distorsioni $\dot{\lambda}$ impresse in V_p al corpo pensato sempre perfettamente elastico.

Agli spostamenti (90) si sposano quindi le deformazioni:

$$(91) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}'(\dot{X}_i, \dot{p}_i) + \dot{\epsilon}_{ij}''(\dot{\lambda})$$

costituite da due aliquote entrambe congruenti.

Risulta quindi dalla (1):

$$(92) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}'(\dot{X}_i, \dot{p}_i) + \dot{\epsilon}_{ij}''(\dot{\lambda}) - \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

e si può allora scrivere:

$$(93) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij}'(\dot{X}_i, \dot{p}_i) + \dot{\epsilon}_{ij}^*(\dot{\lambda})$$

essendosi indicato con

$$(94) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^*(\dot{\lambda}) = \dot{\epsilon}_{ij}''(\dot{\lambda}) - \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

le deformazioni elastiche che si destano nel corpo per ripristinare la congruenza turbata dalle $\dot{\epsilon}_{ij}^p$.

Tenendo presente la (8), alle (93) si associa uno stato di tensione:

$$(95) \quad \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}'(\dot{X}_i, \dot{p}_i) + \dot{\sigma}_{ij}^*(\dot{\lambda})$$

la cui prima aliquota, coincidente con la soluzione elastica, è in equilibrio con $\dot{X}_i, \dot{p}_i$ e la seconda, associata alle distorsioni $\dot{\lambda}$, è in equilibrio con carichi nulli.

Ciò premesso, tenendo presente che per la (20) M_p può scriversi:

$$(96) \quad M_p = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i dS,$$

effettuando nella (96) le sostituzioni consentite dalle (90), (93) e (95) si ha:

$$(97) \quad M_p = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij}' + \dot{\sigma}_{ij}^*) (\dot{\epsilon}_{ij}' + \dot{\epsilon}_{ij}^*) dV - \int_V \dot{X}_i (\dot{u}_i' + \dot{u}_i'') dV + \\ - \int_{S_p} \dot{p}_i (\dot{u}_i' + \dot{u}_i'') dS.$$

D'altra parte per il principio dei lavori virtuali essendo $\dot{\sigma}_{ij}^*$ una distribuzione auto-equilibrata di tensioni ed $\dot{\epsilon}_{ij}'$ una distribuzione congruente di deformazioni si ha:

$$(98) \quad \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}' dV = 0$$

e quindi anche:

$$(99) \quad \int_V \dot{\sigma}_{ij}' \dot{\epsilon}_{ij}^* dV = 0.$$

La (97) può quindi porsi nella forma:

$$(100) \quad M_p = M_p'(\dot{X}_i, \dot{p}_i) + M_p''(\dot{\lambda})$$

essendo:

$$(101) \quad \begin{aligned} M_p' &= \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}' \dot{\epsilon}_{ij}' dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i' dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i' dS \\ M_p'' &= \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i'' dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i'' dS. \end{aligned}$$

Com'è immediato rilevare dalle (101) il funzionale M_p' non dipende da $\dot{\lambda}$ mentre M_p'' è una funzione quadratica dei $\dot{\lambda}$. Discende da ciò, ricordando il Teorema I, che la distribuzione dei $\dot{\lambda}$ che corrisponde alla soluzione incrementale del problema per il corpo elasto-plastico è quella corrispondente al più piccolo valore di M_p'' nel sottospazio $\dot{\lambda} \geq 0$.

Tenendo presente che M_p'' coincide esattamente, a meno del segno, col funzionale di Ceradini, il principio di massimo enunciato da detto Autore per i corpi elasto-plastici viene ritrovato come formulazione in un iperspazio ridotto dei principii di minimo prima dimostrati. È banale dimostrare che per i corpi elasto-incrudenti lo stesso tipo di ragionamento conduce a poter scrivere:

$$(102) \quad M_i = M_i'(\dot{X}_i, \dot{p}_i) + M_i''(\dot{\lambda})$$

essendo:

$$(103) \quad \begin{aligned} M_i' &= \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}' \dot{\epsilon}_{ij}' dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i' dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i' dS \\ M_i'' &= \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \frac{1}{2} \int_V h \dot{\lambda}^2 dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i'' dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i'' dS. \end{aligned}$$

Poiché M_i'' coincide ancora, a meno del segno, col funzionale di Ceradini per i corpi elasto-incrudenti, la validità del ragionamento or ora fatto per i corpi elasto-plastici si estende senza alcuna variante anche ai corpi incrudenti.

4. I principi di minimo enunciati e dimostrati nel presente lavoro (Note I e II) generalizzano in termini incrementali per i continui elasto-plastici il classico teorema della minima energia potenziale totale per i continui perfettamente elastici. Seppur forse impropriamente essi potrebbero deno-

minarsi come principii della minima energia totale incrementale. In particolare, se si trascurano i ritorni elastici, tali principii (Teoremi II e IV), risultano essere principii variazionali e come tali conducono alla definizione del problema attraverso la soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineari nelle incognite $\dot{u}_i, \dot{\lambda}$. Se viceversa si vuol tener conto dei ritorni elastici, tali principii (Teoremi I e II) forniscono la soluzione attraverso la ricerca di un minimo vincolato e ricadono nel dominio dei problemi di ottimizzazione ed in particolare della programmazione quadratica. Il vantaggio di tali principii è quello di fornire una visione organica del problema in termini di parametri che più spontaneamente viene fatto di assumere come incognite e cioè gli spostamenti u_i e le distorsioni plastiche λ e forniscono peraltro la possibilità di sistematizzare procedimenti di calcolo numerico in maniera tutt'affatto generale per il calcolo incrementale delle strutture elastoplastiche.