
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PLACIDO CICALA

Teoria lineare discretizzata delle strutture a guscio

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.5, p. 545–551.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_5_545_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Teoria lineare discretizzata delle strutture a guscio.*

Nota (*) del Corrisp. PLACIDO CICALA.

SUMMARY. — A linear theory for rapid variation solutions in shells of arbitrary forms referred to arbitrary coordinates is presented. A reduction to discrete elements is effected in matrix form.

Se la teoria lineare della parete sottile elastica viene ricavata dalla formulazione rigorosa tridimensionale col metodo degli sviluppi in serie di potenze del parametro di spessore δ , qualora circa gli ordini di grandezza dell'incognita generica V e delle sue derivate V^* , V' rispetto alle coordinate stabilite sulla superficie media si facciano le posizioni

$$V^*, V' = o(V\delta^{-1/2})$$

si giunge ad una formulazione che presenta certe analogie con quella che nelle trattazioni di lingua inglese è detta « shallow shell theory ». Nella presente nota, per il caso più generale sia per la forma della superficie media sia per la scelta delle coordinate, di questa teoria si riporta la formulazione con errori relativi $o(\delta)$ (1) e si presenta una riduzione a sistema discreto.

NOTAZIONI.

Il vettore \mathbf{x}_m che va dall'origine fissa al punto della superficie media Σ è espresso in funzione delle coordinate ξ_a, ξ_b . Queste sono stabilite in modo del tutto arbitrario: si richiede solo che la curvatura geodetica delle linee coordinate sia dello stesso ordine delle curvature di Σ . Si introducono le definizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_a &= \dot{\mathbf{x}}_m \quad , \quad \mathbf{h}_b = \dot{\mathbf{x}}'_m \quad , \quad \mathbf{h}_a \times \mathbf{h}_b = m\mathbf{n} \\ h_a^2 &= \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_a \quad , \quad h_b^2 = \mathbf{h}_b \cdot \mathbf{h}_b \quad , \quad h_{ab} = \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b \\ \text{(I)} \quad \ddot{\mathbf{x}}_m &= c_{11} \mathbf{h}_a + c_{12} \mathbf{h}_b + c_{13} \mathbf{n} \\ \ddot{\mathbf{x}}'_m &= c_{21} \mathbf{h}_a + c_{22} \mathbf{h}_b + c_{23} \mathbf{n} \\ \ddot{\mathbf{x}}_m &= c_{31} \mathbf{h}_a + c_{32} \mathbf{h}_b + c_{33} \mathbf{n} \end{aligned}$$

essendo \mathbf{n} il versore normale a Σ e $f^* = \partial f / \partial \xi_a$, $f' = \partial f / \partial \xi_b$.

(*) Presentata nella seduta del 19 aprile 1969.

(1) Per la deduzione di quelle relazioni ved. la monografia: P. Cicala — Systematic approximation approach to linear shell theory — Levrotto e Bella, Torino 1965.

Si indica con ζ la coordinata misurata nella direzione \mathbf{n} , compresa fra $-h/2$ e $h/2$ e si scrive $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m + \zeta \mathbf{n}$. Sia \mathbf{u} il vettore spostamento; delle componenti medie di spostamento si danno le definizioni

$$(2) \quad u_a = \mathbf{h}_a \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{u} \, d\zeta/h, \quad u_b = \mathbf{h}_b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{u} \, d\zeta/h, \quad w = \mathbf{n} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{u} \, d\zeta/h$$

con integrazioni estese allo spessore. Si indica con $(s_a \mathbf{x}' + s_{ab} \mathbf{x}' + s_{ac} \mathbf{n}) \, d\xi_b \, d\zeta$ la risultante delle tensioni sull'elemento $d\xi_b \, d\zeta$ della sezione $\xi_a = \text{cost.}$ Similmente si denota con $(s_b \mathbf{x}' + s_{ab} \mathbf{x}' + s_{bc} \mathbf{n}) \, d\xi_a \, d\zeta$ la forza sull'elemento $d\xi_a \, d\zeta$ di sezione $\xi_b = \text{cost.}$ Gli sforzi risultanti sono espressi da

$$(3) \quad S_i = \int_{-h/2}^{h/2} s_i \, d\zeta \quad (i = a, b, ab, ac, bc)$$

$$(4) \quad B_i = - \int_{-h/2}^{h/2} s_i \, \zeta \, d\zeta \quad (i = a, b, ab).$$

La forza esterna sull'elemento di parete corrispondente agli incrementi $d\xi_a \, d\xi_b$ viene scritta nella forma $(F_a \mathbf{h}_a + F_b \mathbf{h}_b + F_n \mathbf{n}) \, d\xi_a \, d\xi_b$.

IL SISTEMA DIFFERENZIALE.

Nella scrittura delle equazioni che governano lo stato di tensione in esame, i termini fondamentali in ciascuna relazione saranno separati mediante il segno \dots da quelli piccoli come $\delta^{1/2}$ rispetto a questi; lo stesso segno al termine dell'equazione indica l'omissione di un residuo $o(\delta)$ rispetto ad un termine fondamentale. Così si scrivono le equazioni di equilibrio

$$(5) \quad S'_a + S'_{ab} \dots + F_a + c_{11} S_a + c_{21} S_b + 2 c_{31} S_{ab} = \dots$$

$$(6) \quad S'_b + S'_{ab} \dots + F_b + c_{12} S_a + c_{22} S_b + 2 c_{32} S_{ab} = \dots$$

$$(7) \quad S'_{ac} + S'_{bc} + c_{13} S_a + c_{23} S_b + 2 c_{33} S_{ab} + F_n \dots = \dots$$

$$(8) \quad B'_a + B'_{ab} + S_{ac} \dots + c_{11} B_a + c_{21} B_b + 2 c_{31} B_{ab} = \dots$$

$$(9) \quad B'_b + B'_{ab} + S_{bc} \dots + c_{12} B_a + c_{22} B_b + 2 c_{32} B_{ab} = \dots$$

Si osservi come la componente di carico normale a Σ , supposta dello stesso ordine delle tangenziali F_a, F_b , entri nei termini fondamentali mentre quelle intervengono solo nei termini secondari. Per di più, in molti problemi relativi al guscio piatto si ha che $F_a, F_b = o(F_n \delta^{1/2})$, sicché tali componenti possono essere trascurate anche in una trattazione di II approssimazione: così si farà qui nel seguito.

Supposto il materiale elastico e isotropo, con modulo E e coefficiente di Poisson ν , si hanno le relazioni fra sforzi e deformazioni:

$$(10), (11) \quad \mathbf{a} \cdot \{S\} = E m h \{e\}, \quad \{B\} m^3 = E h h_n^2 \mathbf{b} \cdot \{x\}$$

dove $\{S\}$ è la colonna dei valori S_a, S_b, S_{ab} , $\{e\}$ quella dei valori

$$(12) \quad e_a = u_a - c_{13} w \dots - c_{11} u_a - c_{12} u_b \dots$$

$$(13) \quad e_b = u_b - c_{23} w \dots - c_{21} u_a - c_{22} u_b \dots$$

$$(14) \quad e_{ab} = u_a + u_b - 2 c_{33} w \dots - 2 c_{31} u_a - 2 c_{32} u_b \dots$$

$\{B\}$ è la colonna contenente B_a, B_b, B_{ab} mentre $\{x\}$ contiene

$$(15) \quad x_a = w \dots - c_{11} w - c_{12} w' \dots$$

$$(16) \quad x_b = w' \dots - c_{21} w - c_{22} w' \dots$$

$$(17) \quad 2 x_{ab} = 2 w \dots - 2 c_{31} w - 2 c_{32} w' \dots$$

a è una matrice simmetrica composta con gli elementi

$$(18) \quad \begin{aligned} a_{11} &= h_a^4, & a_{12} &= h_{ab}^2 - \nu m^2, & a_{13} &= 2 h_a^2 h_{ab} \\ a_{22} &= h_b^4, & a_{23} &= 2 h_b^2 h_{ab}, & a_{33} &= 4 h_{ab}^2 + 2(1 + \nu) m^2 \end{aligned}$$

b , anche simmetrica, è composta con gli elementi

$$(19) \quad \begin{aligned} b_{11} &= h_b^4, & b_{12} &= h_{ab}^2 + \nu m^2, & b_{13} &= -h_b^2 h_{ab} \\ b_{22} &= h_a^4, & b_{23} &= -h_a^2 h_{ab}, & b_{33} &= h_{ab}^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2. \end{aligned}$$

Infine è

$$h_n^2 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)}.$$

Le componenti di u , $\{S\}$ e $\{B\}$, insieme con S_{ac} e S_{bc} sono le incognite del sistema formato dalle 6 equazioni (10), (11) e dalle (5)-(9).

RIDUZIONE AD ELEMENTI FINITI.

Si scompone il campo di variazione delle coordinate in intervalli costanti, $2 \Delta_a$ per ξ_a e $2 \Delta_b$ per ξ_b . Sulle linee coordinate così intervallate si trovano i *nodi*, vertici delle *maglie*. Per la porzione di guscio che, riportata in un piano di coordinate ξ_a, ξ_b si trasforma nella fig. 1 si consideri il sistema di sforzi

$$(20) \quad \begin{aligned} S_a(N) &= \Delta_a/\Delta_b - (c_{22} + 2 c_{31}) \Delta_a, & S_a(E) &= c_{21} \Delta_b \\ S_a(S) &= \Delta_a/\Delta_b + (c_{22} + 2 c_{31}) \Delta_a, & S_a(W) &= -c_{21} \Delta_b \\ S_b(E) &= \Delta_b/\Delta_a - (c_{11} + 2 c_{32}) \Delta_b, & S_b(S) &= -c_{12} \Delta_a \\ S_b(W) &= \Delta_b/\Delta_a + (c_{11} + 2 c_{32}) \Delta_b, & S_b(N) &= c_{12} \Delta_a \\ S_a(C) &= -2 \Delta_a/\Delta_b, & S_b(C) &= -2 \Delta_b/\Delta_a \\ S_{ab}(NE) &= -1 + c_{11} \Delta_a + c_{22} \Delta_b, & S_{ab}(SE) &= 1 - c_{11} \Delta_a + c_{22} \Delta_b \\ S_{ab}(SW) &= -1 - c_{11} \Delta_a - c_{22} \Delta_b, & S_{ab}(NW) &= 1 + c_{11} \Delta_a - c_{22} \Delta_b \end{aligned}$$

essendo $S_a(N)$, $S_{ab}(NW)$ i valori di S_a nel nodo N e di S_{ab} nel centro della maglia con i nodi N , W ; nelle altre ubicazioni che non figurano nelle (20) gli sforzi S sono nulli. I coefficienti c possono tutti calcolarsi nel nodo centrale C . Nella riduzione adottata gli sforzi (20) soddisfano alle condizioni di equilibrio (5), (6): ad essi si associano carichi normali che, secondo la (7), si scrivono per ciascun nodo

$$(21) \quad P_m = (c_{13} S_a + c_{23} S_b + 2 c_{33} S_{ab}) 4 \Delta_a \Delta_b.$$

I valori in parentesi si riferiscono al nodo, ad eccezione di S_{ab} che si assumerà come media dei valori nelle 4 maglie adiacenti.

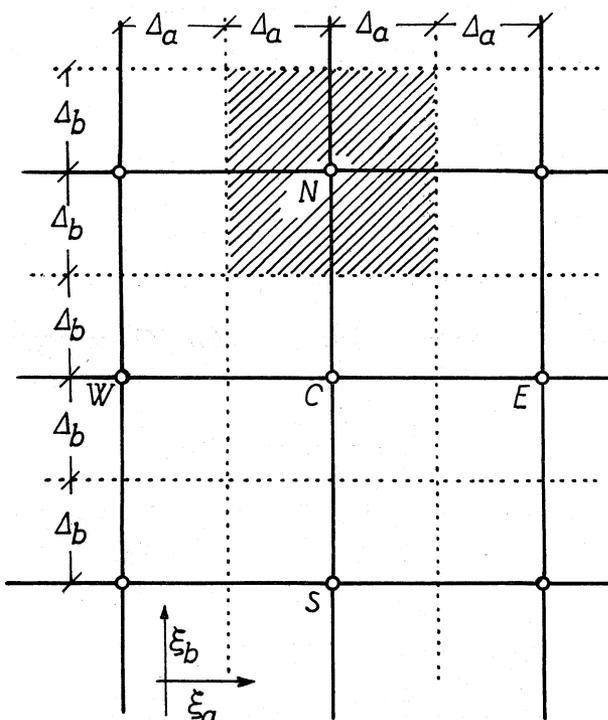


Fig. 1.

Sia $\{S_i\}$ la colonna contenente il complesso degli sforzi risultanti. Essi si esprimono per combinazione dei sistemi (20) con fattori $X/4 \Delta_a \Delta_b$: conseguentemente per essi e per i carichi P_m risultanti si scrive ⁽²⁾

$$(22), (23) \quad 4 \Delta_a \Delta_b \{S_i\} = \mathbf{S} \{X\}, \quad \{P_m\} = \mathbf{P} \{X\}$$

(2) Per $\Delta_a, \Delta_b \rightarrow 0$ la (22) conduce alle relazioni

$$S_a = X'' - (c_{22} X)' + (c_{21} X)' - 2 (c_{31} X)'$$

$$S_b = X'' - (c_{11} X)' + (c_{12} X)' - 2 (c_{32} X)'$$

$$S_{ab} = -X'' + (c_{11} X)' + (c_{22} X)'.$$

Queste espressioni, sostituite nelle (5), (6) le verificano, nello stesso ordine di approssimazione. X rappresenta dunque una funzione di tensione.

le colonne delle matrici \mathbf{S} e \mathbf{P} essendo formate in modo ovvio in base alle espressioni (20) e (21) per ciascun sistema. Viene scritta l'equazione dei lavori virtuali di uno di questi sistemi di forze per gli spostamenti effettivi nella forma ⁽³⁾

$$(24) \quad \Sigma P_m w = \Sigma (S_a e_a + S_b e_b + S_{ab} e_{ab}) \Delta_a \Delta_b$$

la somma a I membro estendendosi ai nodi, l'altra agli elementi $\Delta_a \Delta_b$. Le componenti e_a, e_b, e_{ab} siano disposte nella colonna $\{e_t\}$ nello stesso ordine dei corrispondenti fattori nella $\{S_t\}$. La relazione d'elasticità è posta nella forma

$$(25) \quad \{e_t\} = \mathbf{a}_t \{S_t\}.$$

Nel computo del lavoro interno si attribuisce a ciascuna maglia il relativo S_{ab} , mentre gli sforzi S_a, S_b di ciascun nodo sono attribuiti ai 4 quarti di maglia adiacenti al nodo (tratteggiati in fig. 1 per il nodo N). Quindi nella matrice simmetrica \mathbf{a}_t si riportano sulla diagonale i valori $a_{11}/Emh, a_{22}/Emh$ nei posti assegnati per S_a, S_b nel nodo che si considera, e il valore $a_{33}/4 Emh$ ripetuto nei posti assegnati per S_{ab} nelle 4 maglie adiacenti: i termini $a_{12}/Emh, a_{13}/4 Emh, a_{23}/4 Emh$ sono scritti nella posizione relativa agli elementi diagonale che si desume dalla matrice \mathbf{a} . Per il sistema delle (24) si hanno quindi le relazioni

$$(26), (27) \quad \mathbf{P}^* \{w\} = \mathbf{A} \{X\} \quad , \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}^* \mathbf{a}_t \mathbf{S} / 4 \Delta_a \Delta_b$$

essendo $\mathbf{P}^*, \mathbf{S}^*$ le trasposte di \mathbf{P}, \mathbf{S} .

Eliminando le X fra le (23) e (26) si ha la relazione

$$(28) \quad \{P_m\} = \mathbf{P} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}^* \{w\}.$$

Per lo stesso reticolo della fig. 1 si consideri come sistema di deformazioni corrispondente a $w(C) = 4 \Delta_a \Delta_b$ il seguente:

$$(29) \quad \begin{aligned} \varkappa_a(N) &= c_{12} \Delta_a & \varkappa_a(E) &= \Delta_b/\Delta_a + c_{11} \Delta_b \\ \varkappa_a(S) &= -c_{12} \Delta_a & \varkappa_a(W) &= \Delta_b/\Delta_a - c_{11} \Delta_b \\ \varkappa_b(E) &= c_{21} \Delta_b & \varkappa_b(S) &= \Delta_a/\Delta_b - c_{22} \Delta_a \\ \varkappa_b(W) &= -c_{21} \Delta_b & \varkappa_b(N) &= \Delta_a/\Delta_b + c_{22} \Delta_a \\ \varkappa_a(C) &= -2 \Delta_b/\Delta_a & \varkappa_b(C) &= -2 \Delta_a/\Delta_b \\ \varkappa_{ab}(NE) &= 1 + c_{31} \Delta_b + c_{32} \Delta_a & \varkappa_{ab}(SE) &= -1 + c_{31} \Delta_b - c_{32} \Delta_a \\ \varkappa_{ab}(SW) &= 1 - c_{31} \Delta_b - c_{32} \Delta_a & \varkappa_{ab}(NW) &= -1 - c_{31} \Delta_b + c_{32} \Delta_a. \end{aligned}$$

(3) Per $\Delta_a, \Delta_b \rightarrow 0$ la (24) conduce alla condizione di congruenza per e_a, e_b, e_{ab} che si ottiene eliminando u_a, u_b fra le (12)-(14).

Queste espressioni ⁽⁴⁾ attuano le (15)-(17) con le usuali approssimazioni delle differenze finite, come ad esempio

$$4 \Delta_a w^* (\xi_a) \approx w (\xi_a + 2 \Delta_a) - w (\xi_a - 2 \Delta_a).$$

I coefficienti c sono calcolati in C. Le deformazioni risultanti sono espresse per combinazione dei sistemi (29) con fattori $w/4 \Delta_a \Delta_b$:

$$(30) \quad 4 \Delta_a \Delta_b \{x_i\} = \mathbf{B} \{w\}$$

le colonne della matrice \mathbf{B} essendo desunte dalle (29) per ciascuna posizione del punto centrale C. Per questi stessi spostamenti si scrive l'equazione dei lavori virtuali degli sforzi B_a, B_b, B_{ab} e relativi carichi trasversali P_p

$$(31) \quad \Sigma P_p w = \Sigma (B_a x_a + B_b x_b + 2 B_{ab} x_{ab}) \Delta_a \Delta_b$$

essendo le somme estese come per la (24). Nel computo del lavoro interno si attribuisce a ciascuna maglia lo svergolamento x_{ab} mentre le curvature x_a, x_b nel nodo sono attribuite ai 4 elementi adiacenti (tratteggiati in fig. 1 per il nodo N). Quindi, disposti gli sforzi B_a, B_b, B_{ab} nella colonna $\{B_i\}$ nello stesso ordine dei relativi fattori in $\{x_i\}$, si scrive la relazione d'elasticità

$$(32) \quad \{B_i\} = \mathbf{b}_i \{x_i\}$$

componendo la matrice simmetrica \mathbf{b}_i con gli elementi $Eh^2 b_{ij}/m^3$ così come s'è detto per la \mathbf{a}_i . Così, per le (30) e (32) il sistema delle (31) assume la forma

$$(33) \quad \{P_p\} = \mathbf{B}^* \mathbf{b}_i \mathbf{B} \{w\} / 4 \Delta_a \Delta_b.$$

L'equazione risolvete è la seguente

$$(34) \quad \{P_m\} + \{P_p\} = \{P\}$$

nella quale si pone in P la colonna dei carichi agenti, ridotti ai nodi; per i carichi di membrana P_m e per quelli di piastra P_p si sostituiscono le espressioni (28) e (33) e da questa equazione matriciale si calcolano gli spostamenti w .

CONCLUSIONI.

La teoria presentata è atta all'esame dello stato di tensione nel guscio presso le accidentalità: carichi concentrati, singolarità geometriche o di vincolo lungo il contorno. Essa si basa sull'ipotesi di variazione rapida per le

(4) In sostituzione delle (20) si possono adottare per $mS_a, mS_b, -mS_{ab}$ le espressioni (26) di x_a, x_b, x_{ab} . In virtù delle identità

$$m^*/m = c_{11} + c_{32} \quad , \quad m'/m = c_{22} + c_{31}$$

risulta che così si ottiene la medesima approssimazione: anzi, se Σ è sviluppabile, le (5) e (6) sono soddisfatte *esattamente*, come si richiede per le soluzioni membranali.

incognite e non richiede nessuna posizione circa la forma della superficie media Σ . Anche la scelta delle coordinate è libera, salvo per una limitazione che esclude i riferimenti polari per la zona prossima al polo. Il sistema differenziale presenta le sostanziali semplificazioni della teoria del guscio piatto: nelle equazioni di equilibrio in direzione tangente a Σ non intervengono gli sforzi flessionali e questi non sono influenzati dagli spostamenti tangenti a Σ . Questo permette di svolgere il processo di risoluzione attraverso due percorsi paralleli che convergono infine nell'equazione di equilibrio per le forze normali a Σ .

Il metodo di riduzione a variabili discrete qui suggerito segue appunto tale cammino, spezzando le complessità del sistema di 8° ordine in quelle di due sistemi del 4°. Esso non differisce nella sostanza da un procedimento per differenze finite: però, siccome le condizioni di congruenza sul primo percorso e quelle di equilibrio sul secondo sono scritte mediante l'equazione dei lavori virtuali, le simmetrie volute dal teorema di Betti sono rispettate anche per quelle condizioni di vincolo per le quali quelle simmetrie si perdono nell'usuale riduzione alle differenze finite. Delle condizioni al contorno non è qui trattato: esse introducono modificazioni nella maglia tipo ma nessuna alterazione nel concetto del metodo. Il processo di risoluzione si riduce alla immissione in matrici delle caratteristiche della struttura, le operazioni matriciali essendo eseguibili dagli elaboratori su programmi correnti.

Fuori della zona dove le incognite variano rapidamente la precisione delle espressioni indicate può non essere sufficiente: nelle tre equazioni di equilibrio alla traslazione i termini qui distinti per diverso ordine di grandezza diventano tutti dello stesso ordine, mentre quelli dovuti alla flessione scompaiono. Il sistema ridotto, del II ordine, conviene che sia risolto a parte, con l'inclusione dei carichi tangenti a Σ , qui omissi. Tali sforzi si sommano a quelli del sistema completo che quindi permette la risoluzione di una vasta classe di problemi.