ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PAOLO SANTORO

**Alcune generalizzazioni di teoremi esistenziali che
utilizzano il procedimento di iterazione**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.5, p. 541–544.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_5_541_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni differenziali. — *Alcune generalizzazioni di teoremi esistenziali che utilizzano il procedimento di iterazione* (*). Nota di PAOLO SANTORO, presentata (**) dal Socio G. Sansone.

SUMMARY. — In this paper a functional equation to which a broad class of boundary-value problems for differential equations can be reduced, is considered.

Indichiamo con X ed Y due spazi di Banach, F uno spazio vettoriale munito di una struttura di spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo, G un sottospazio vettoriale di F munito di una struttura di spazio normato completo e la topologia di G è più fine di quella indotta su G dalla topologia di F .

Sia poi:

- $u(x)$ una trasformazione lineare di X in F ,
- $w(g)$ una funzione (non necessariamente lineare) di G in Y ,
- $v(y)$ una trasformazione lineare di Y in F .

Si pone il seguente problema:

si cercano due punti $x \in X$, $g \in G$ tali che l'equazione

$$(E) \quad g = u(x) + v(w(g))$$

sia soddisfatta.

A tale problema si riducono ampie classi di « problemi ai limiti » per le equazioni differenziali (cfr. ad esempio [1], [2], [3] e bibliografie ivi citate).

In [1] sono dati alcuni teoremi di esistenza di soluzioni per l'equazione (E) in cui tra le altre ipotesi si suppone che $w(g)$ soddisfi ad una ipotesi di Lipschitz. D'altra parte la moderna letteratura sui teoremi di punto fisso per trasformazioni di uno spazio metrico in sé, teoremi che utilizzano i procedimenti di iterazione, è ricca di lavori in cui i vari Autori hanno cercato di attenuare l'ipotesi di Lipschitz con ipotesi di tipo di Krein. In tale indirizzo, nel n. 1 si generalizza un teorema sulle funzioni implicite riportato in [4], cap. X, n. 1; nel n. 2 si dà, sotto opportune ipotesi su u e v , una condizione sufficiente perché l'equazione (E) ammetta soluzioni. Nel n. 3 con il teorema 2, usando ipotesi più generali su u e v , si ha un risultato più debole.

Ringrazio il prof. H. A. Antosiewicz per l'utile critica svolta nella stesura di questo lavoro.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R. per l'anno 1967-68, (gruppo 11).

(**) Nella seduta del 19 aprile 1969

1. - In tutto il seguito saranno utili le seguenti definizioni:

per ogni funzione $\varphi(r)$ reale di variabile reale ($r \geq 0$) e per ogni numero reale $\alpha > 0$ definiamo la successione di funzioni

$$\Psi_\alpha^1(r) = \varphi(\alpha r) \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad ; \quad \Psi_\alpha^{n+1} = \Psi_\alpha^n \circ \Psi_\alpha^1 \quad \forall n \geq 1$$

e diremo che φ soddisfa l'ipotesi (H_α) se

- i) φ è non decrescente per $r \geq 0$ e $\varphi(0) = 0$;
- ii) esiste un $\alpha > 0$ ed un $r \geq 0$ tale che $\sum_{n \geq 1} \Psi_\alpha^n(r) < \infty$.

Supponiamo che φ soddisfi l'ipotesi (H_α) e sia $I_\alpha = [0, r_1[$ tale che $\sum_{n \geq 1} \Psi_\alpha^n(r) < \infty$ per ogni $r \in I_\alpha$, allora poniamo in I_α : $\Psi_\alpha(r) = \sum_{n \geq 1} \Psi_\alpha^n(r)$ (1).

TEOREMA 1: *Siano X ed Y due spazi di Banach e siano U una sfera aperta in X di centro o e raggio σ e V una sfera aperta in Y di centro o e raggio β . Sia $q(x, y)$ una trasformazione continua di $U \times V$ in Y tale che*

$$\|q(x, y_1) - q(x, y_2)\| \leq \varphi(\|y_1 - y_2\|) \quad x \in U, y_1 \in V, y_2 \in V$$

dove φ soddisfa l'ipotesi (H_1) . Se $\|q(x, 0)\| < \sigma$ qualunque sia $x \in U$, e se $\sigma + \Psi_1(\sigma) < \beta$ allora esiste una ed una sola funzione $y(x)$ definita in U a valori in V tale che

$$y(x) = q(x, y(x))$$

ed $y(x)$ è continua in U.

Dimostrazione: Poniamo per ogni $x \in U$: $y_0 = 0$, $y_1 = q(x, 0)$, $\dots$, $y_{n+1} = q(x, y_n)$, $\dots$.

Si ha per induzione

$$(1) \quad \|y_{n+1} - y_n\| = \|q(x, y_{n-1}) - q(x, y_{n-2})\| \leq \Psi_1^n(\|q(x, 0)\|)$$

e quindi

$$\|y_{n+p} - y_n\| \leq \sum_{1 \leq k \leq p} \|y_{n+k} - y_{n+k-1}\| \leq \sum_{1 \leq k \leq p} \Psi_1^{n+k-1}(\|q(x, 0)\|)$$

cioè la successione $\{y_n\}$ è di Cauchy. Inoltre è

$$\|y_n\| \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \|y_k - y_{k-1}\| \leq \sigma + \Psi(\sigma) < \beta.$$

La successione y_n converge quindi per la completezza di Y ad un punto y con $\|y\| < \beta$ e si ha

$$(2) \quad y = \lim y_{n+1} = \lim q(x, y_n) = q(x, y) \quad \text{per ogni } x \in U.$$

(1) In [5] sono date le principali proprietà delle funzioni φ che soddisfano l'ipotesi (H_α) e sulle corrispondenti funzioni Ψ_α , che riportiamo qui per comodità del lettore. Ψ_α è non decrescente in I_α , $\Psi_\alpha(0) = 0$; inoltre se φ soddisfa l'ipotesi (H_α) : essa soddisfa anche l'ipotesi $(H_{\alpha'})$ per ogni $\alpha' \in]0, \alpha[$ e per $I_{\alpha'} \subset I_\alpha$ è $\Psi_{\alpha'}(r) \leq \Psi_\alpha(r)$ per tutte le $r \in I_{\alpha'}$; è $\varphi(\alpha r) < r$ per $r \in I_\alpha$; infine se α è anche continua in $[0, \infty[$ allora Ψ_α è continua in I_α . La funzione cr per ogni c tale che $0 \leq c < \alpha$ soddisfa l'ipotesi (H_α) con $\alpha < 1$.

Ma $y_1 = y_1(x) = q(x, 0)$ è una funzione continua in U e tali sono anche le iterate $y_{n+1}(x) = q(x, y_n(x))$. Da (I) poi si ha $\|y_{n+1}(x) - y_n(x)\| \leq \Psi^n(\sigma)$ e perciò la serie $\sum_{n \geq 1} (y_{n+1}(x) - y_n(x))$ converge in norma ad una funzione $y(x)$ continua in $\bar{U}$ e con $\|y(x)\| < \beta$.

Essendo poi $\varphi(r) < r$ per l'ipotesi (H_1) , vi è una sola funzione $y(x)$ che soddisfa la condizione $y(x) = q(x, y(x))$. Se infatti ve ne fossero due poniamo $y(x)$ e $g(x)$ che soddisfano l'equazione si avrebbe per ogni $x \in U$:

$$\|y(x) - g(x)\| = \|q(x, y(x)) - q(x, g(x))\| \leq \varphi(\|y(x) - g(x)\|) < \|y(x) - g(x)\|$$

e ciò è assurdo.

Nota. Se $\varphi = cr$ si ha il teorema dato in [4] loc. cit.

2. - Riprendiamo il problema e supponiamo in tutto il seguito che v sia continua. Poniamo con H. A. Antosiewicz [1] la seguente definizione:

La coppia di spazi di Banach (Y, G) è *ammissibile* rispetto alla coppia di trasformazioni lineari (u, v) se per ogni $y \in Y$ esiste un $x \in X$ tale che

$$u(x) + v(y) \in G$$

H. A. Antosiewicz [1] ha dimostrato i seguenti lemmi:

LEMMA 1. - Se (Y, G) è ammissibile esiste una costante $\mu > 0$ e per ogni $y \in Y$ una $x \in X$ tale che $u(x) + v(y) \in G$ è $\mu \|u(x) + v(y)\| \leq \|y\|$.

Si noti che il sottospazio vettoriale $u(X) \cap G$ è chiuso in G ; ma in generale il sottospazio vettoriale X^0 dei punti $x \in X$ tali che $u(x) \in G$ non è in generale chiuso.

LEMMA 2. - Sia u iniettivo ed X^0 chiuso ed abbia un supplementare topologico X' in X . Allora la restrizione u^0 di u ad X^0 è una trasformazione lineare biunivoca di X^0 su $u(X) \cap G$. Inoltre se la coppia (Y, G) è ammissibile, esiste una trasformazione lineare $s(y)$ definita in Y a valori in X' tale che $v^0 = u(s(y)) + v(y)$ è una trasformazione lineare continua di Y in G .

Dal teorema 1 e dal lemma 2 si può trarre il seguente

COROLLARIO 1. - Valgano le ipotesi del lemma 2 e siano u^0 e v^0 le funzioni che figurano nel lemma 2 e consideriamo l'equazione nella funzione incognita $r(x)$

$$(E') \quad r(x) = u^0(x) + v^0(w(r(x)))$$

con x in un intorno U di 0 in X^0 , supponiamo inoltre che in una sfera aperta S in G di centro 0 e raggio β , $w(g)$ sia continua e tale che $\|w(g') - w(g'')\| \leq \varphi(\|g' - g''\|)$ per $g' \in G$ e $g'' \in G$; e che φ soddisfi l'ipotesi (H_1) e tale che $\|v^0\|(\|w(0)\| + \Psi_1(\|w(0)\|)) < \beta$; allora esistono un intorno $U^0 \subset U$ e una ed una sola funzione $r(x)$ definita in U^0 a valori in S che soddisfa l'equazione (E') .

Infine utilizzando la trasformazione lineare $s(y)$ da Y in X' del lemma 2 si deduce che per ogni $x \in U$ i punti $g = r(x) \in G$, $\tilde{x} = x + s(w(g)) \in X$, soddisfano l'equazione (E) .

3. - TEOREMA 2: Sia (Y, G) ammissibile e siano soddisfatte le ipotesi del lemma 1 e sia $\mu > 0$ la costante come nel lemma 1. Data l'equazione (E), se in una sfera aperta V in G di centro o e raggio γ , $w(g)$ è continua soddisfa la condizione

$$\|w(g_1) - w(g_2)\| \leq \varphi(\|g_1 - g_2\|) \quad g_1 \in V, g_2 \in V$$

con φ soddisfacente l'ipotesi $(H_{1/\mu})$ ed inoltre $\|w(o)\| < \gamma$ e insieme $\|w(o)\| + \Psi_{1/\mu}(\|w(o)\|/\mu) < \gamma/\mu$ allora esiste almeno una coppia (x, g) , $x \in X$, $g \in G$ per cui (E) è soddisfatta.

Dimostrazione: Costruiamo due successioni $\{x_n\}$ in X e $\{g_n\}$ in G nel seguente modo

$$a) \quad u(x_{n+1} - x_n) + v(w(g_n) - w(g_{n+1})) \in G$$

$$b) \quad g_{n+1} = u(x_{n+1}) + v(w(g_n))$$

con $x_0 = o$, $g_0 = o$, x_1 quindi tale che $g_1 = u(x_1) + v(w(o)) \in G$ e imponiamo che

$$c) \quad \mu \|g_{n+1} - g_n\| \leq \|w(g_n) - w(g_{n-1})\|$$

e quindi x_1 sia tale che $\mu \|g_1\| \leq \|w(o)\| < \gamma/\mu$.

Con la stessa tecnica usata in [5] si dimostra che la successione $\{g_n\}$ converge in G verso un punto $g \in G$. In conseguenza la successione $\{u(x_n)\}$ converge in F ad un punto $g - V(w(g)) \in F$. Poiché $u(X)$ è chiuso in F si ha l'esistenza di un punto $x \in X$ per cui è $g = u(x) + v(w(g))$.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] H. A. ANTOSIEWICZ, *Un analogue du principe du point fixe de Banach*, « Ann. Mat. Pura Appl. », (4), 74, 61-64 (1966).
- [2] H. A. ANTOSIEWICZ, *Linear Problems for non linear ordinary differential equations*, « Proc. U. S. Japan Symp. on D. E. ».
- [3] R. CONTI, *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations*, « Boll. U.M.I. », (3), 22, 135-178 (1967).
- [4] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of modern analysis*. Academic Press, New York 1960.
- [5] P. SANTORO, *Sull'equazione funzionale quasilineare $u(x) + p(x) = y$ fra spazi di Banach* (cfr. questi « Rendiconti », (4), 46, 348 (1969)).