Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Doina Pop

Mesures spectrales de type p et interpolation

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.5, p. 530–534.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_5_530_0>

Analisi funzionale. — *Mesures spectrales de type p et interpolation.* Nota di DOINA POP, presentata (*) dal Corrisp. G. FICHERA.

RIASSUNTO. – In questa nota si estende la nozione di misura spettrale di tipo p e si dimostra inoltre che il teorema di interpolazione stabilito in [2] conserva la sua validità anche nel caso di misure spettrali in senso esteso.

1. – Soit $\mathfrak{X}$ un espace de Banach et B un clan borélien de sous-ensembles d'un ensemble T. Nous appellerons une mesure spectrale $E = \{E(\sigma)\}_{\sigma \in B}$ dans $\mathfrak{X}$ (voir [1]) de type p $(p > 1)$ si:

$$\frac{1}{c} \sum \| E(\sigma_i) x \|^p \leq \|x\|^p \leq c \sum \| E(\sigma_i) x \|^p \tag{1}$$

pour toute partition finie $\{\sigma_i\} \subset B$ de T et pour tout $x \in \mathfrak{X}$, c étant une constante ≥ 1.

Les mesures spectrales de type p avec $c = 1$, ont été introduites dans [2] en étudiant certains espaces d'interpolation définis en termes de ces mesures. Un des buts de cette note est de démontrer, que le théorème d'interpolation donné dans [2], s'applique également dans le cas $c \neq 1$.

Si $\mathfrak{X}$ est un espace de Hilbert toute mesure spectrale est de type 2, [4] (si elle est orthogonale, évidemment $c = 1$). Dans le cas $\mathfrak{X} = L^p_\mu(T)$ où μ est une mesure ≥ 0 sur T, la mesure spectrale définie par $E(\sigma) x = \chi_\sigma x$ (χ_σ-fonction caractéristique de σ) est évidemment de type p avec $c = 1$; si $p \neq 2$ il y a des mesures spectrales qui ne sont pas de type p [3].

2. – Soit $\mathcal{G}$ un semi-groupe topologique et $C = C(\mathcal{G})$ l'espace de Banach des fonctions réelles, continues, bornées sur $\mathcal{G}$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{G}} |f(x)|$. On appelle une fonctionnelle linéaire, positive φ sur $C(\mathcal{G})$, moyenne invariante (à gauche) si $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(f) = \varphi({}_s f)$, où ${}_s f(x) = f(sx)$ pour chaque $s \in \mathcal{G}$ et quel que soit $f \in C(\mathcal{G})$.

Dixmier [5] démontre que tout semi-groupe abélien possède une moyenne invariante, en particulier, si $\mathcal{G}$ est un semi-groupe abélien discret. En utilisant ce résultat on va démontrer le théorème suivant

THÉORÈME 1. – *Soit* $E = \{E(\sigma)\}_{\sigma \in B}$ *une mesure spectrale de type p (c'est-à-dire vérifiant* (1)). *Alors, pour tout* $x \in \mathfrak{X}$ *il existe une mesure* $\mu_x \geq 0$ *sur* B *telle que*:

$$\frac{1}{c} \| E(\sigma) x \|^p \leq \mu_x(\sigma) \leq c \| E(\sigma) x \|^p \qquad \textit{pour tout} \quad \sigma \in B. \tag{2}$$

(*) Nella seduta del 10 maggio 1969.

Démonstration. – Soit $\mathcal{G}$ le semi-groupe des sous-clans finis de B dont la multiplication est définie de la manière suivante: si P et Q $\in \mathcal{G}$, leur produit sera le clan $P \vee Q$ engendré par P et Q. $\mathcal{G}$ est un semi-groupe abélien discret.

Soit $f_{x,\sigma}(P)$ la fonction définie sur $\mathcal{G}$ par:

$$f_{x,\sigma}(P) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sigma \notin P \\ \sum_{\omega \in A(\sigma, P)} \| E(\omega) x \|^p & \text{si} \quad \sigma \in P \end{cases} \tag{3}$$

où $A(\sigma, P)$ est l'ensemble des atomes $\omega \subset \sigma$ de P. En appliquant (1) pour $x = E(\sigma) x$ on obtient facilement:

$$f_{x,\sigma}(P) \leq c \| E(\sigma) x \|^p \tag{4}$$

donc les fonctions $f_{x,\sigma}$ sont bornées sur $\mathcal{G}$. D'après le résultat de Dixmier, $\mathcal{G}$ possède une moyenne invariante. On posera, par définition:

$$\mu_x(\sigma) = \psi(f_{x,\sigma}) .$$

D'après (4) on a:

$$\mu_x(\sigma) \leq c \| E(\sigma) x \|^p . \tag{5}$$

Soit Q la partition engendré par les ensembles σ et $T \setminus \sigma$. ψ étant invariante, on a:

$$\psi({}_Q f_{x,\sigma}) = \psi(f_{x,\sigma}) .$$

Alors:

$${}_Q f_{x,\sigma}(P) = \sum_{\omega \in A(\sigma, P \vee Q)} \| E(\omega) x \|^p \geq \frac{1}{c} \| E(\sigma) x \|^p$$

pour chaque $P \in \mathcal{G}$. Comme ψ est positive, il résulte:

$$\frac{1}{c} \| E(\sigma) x \|^p \leq \psi({}_Q f_{x,\sigma}) = \mu_x(\sigma)$$

d'où, vu (5), on obtient (2).

Soient σ_1 et σ_2 deux ensembles disjoints et Q le clan engendré par σ_1 et σ_2. En vertu de l'invariance de ψ:

$$\mu_x(\sigma_1 \cup \sigma_2) = \psi(f_{x,\sigma_1 \cup \sigma_2}) = \psi({}_Q f_{x,\sigma_1 \cup \sigma_2})$$

$$\mu_x(\sigma_1) + \mu_x(\sigma_2) = \psi(f_{x,\sigma_1} + f_{x,\sigma_2}) = \psi({}_Q(f_{x,\sigma_1} + f_{x,\sigma_2})) .$$

Du fait que $\sigma_1, \sigma_2 \in P \setminus Q$ et de (3) il résulte que:

$${}_Q f_{x,\sigma_1 \cup \sigma_2} \equiv {}_Q(f_{x,\sigma_1} + f_{x,\sigma_2})$$

donc $\mu_x(\sigma_1 \cup \sigma_2) = \mu_x(\sigma_1) + \mu_x(\sigma_2)$, $\mu_x(\sigma)$ est ainsi additive. Il nous reste à montrer que si $\{\sigma_n\} \subset B$ est une suite descendante d'ensembles telles que $\cap \sigma_n = \varnothing$, alors $\mu_x(\sigma_n) \to 0$. Cela résulte aisément de la deuxième relation (2).

On peut maintenant énoncer le résultat suivant:

THÉORÈME 2. – *Soit* $\mathfrak{X}$ *un espace de Banach*, T *un ensemble et* B *un clan borélien de* T. *Soit* $\mathrm{E} = \{\mathrm{E}(\sigma)\}_{\sigma \in \mathrm{B}}$ *une mesure spectrale de type* p *et* μ_x *la mesure numérique correspondante, définie dans le théorème* 1. *Pour toute fonction numérique*, B-*mesurable, il existe un opérateur* $\mathrm{U_M} \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$, *linéaire fermé, à domaine* $\mathrm{D}(\mathrm{U_M})$ *et tel que*:

$$\mathrm{D}(\mathrm{U_M}) = \{x \mid x \in \mathfrak{X}\,,\, \mathrm{M}(t) \in \mathrm{L}^p_{\mu_x}(\mathrm{T})\} \tag{6}$$

$$\langle \mathrm{U_M} x, x' \rangle = \int_{\mathrm{T}} \mathrm{M}(t)\, \mathrm{d}\langle \mathrm{E}(t)\, x, x' \rangle \quad ; \quad x \in \mathrm{D}(\mathrm{U_M}),\ x' \in \mathfrak{X}' \tag{7}$$

$$\frac{1}{c^2} \int_{\mathrm{T}} |\mathrm{M}(t)|^p\, \mathrm{d}\mu_x(t) \leq \|\mathrm{U_M} x\|^p \leq c^2 \int_{\mathrm{T}} |\mathrm{M}(t)|^p\, \mathrm{d}\mu_x(t) \tag{8}$$

$$\|\mathrm{U_M}\| \leq c^{3/p} \quad \text{vrai} \quad \max |\mathrm{M}(t)| \tag{9}$$

$$\mathrm{U_1} = \mathrm{I} \quad , \quad \mathrm{U_{M_1 M_2}} \supseteq \mathrm{U_{M_1}}\, \mathrm{U_{M_2}} \quad , \quad \mathrm{U_{M_1+M_2}} \supseteq \mathrm{U_{M_1}} + \mathrm{U_{M_2}}\,. \tag{10}$$

Démonstration. – Pour les fonctions simples, $\mathrm{D}(\mathrm{U_M}) = \mathfrak{X}$ et les relations (7) et (10) (avec égalité au lieu des inclusions) sont manifestes. Démontrons les propriétés (8) et (9) pour ces fonctions. Soit $\mathrm{M}(t)$ une fonction simple:

$$\mathrm{M}(t) = \alpha_i \qquad \text{pour tout} \quad t \in \sigma_i \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i = \mathrm{T}.$$

Alors:

$$\|\mathrm{U_M} x\|^p = \left[\sup_{\|x'\| \leq 1} \left| \int_{\mathrm{T}} \mathrm{M}(t)\, \mathrm{d}\langle \mathrm{E}(t)\, x, x' \rangle \right| \right]^p =$$

$$= \left[\sup_{\|x'\| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathrm{E}(\sigma_i)\, x, x' \rangle \right| \right]^p = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mathrm{E}(\sigma_i)\, x \right\|^p \leq$$

$$\leq c \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i\, \mathrm{E}(\sigma_i)\, x\|^p \leq c^2 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\, \mu_x(\sigma_i)\,.$$

D'autre part:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mathrm{E}(\sigma_i)\, x \right\|^p \geq \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i\, \mathrm{E}(\sigma_i)\, x\|^p \geq \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\, \mu_x(\sigma_i)\,.$$

Donc, pour toute fonction simple on a:

$$\frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\, \mu_x(\sigma_i) \leq \|\mathrm{U_M} x\|^p \leq c^2 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\, \mu_x(\sigma_i)$$

d'où (9). On a de plus:

$$\|U_M x\| \leq c^{2/p} \left[\int_T |M(t)|^p \, d\mu_x(\sigma) \right]^{1/p} \leq c^{2/p} \quad \text{vrai} \quad \max |M(t)| \, [\mu_x(T)]^{1/p} \leq$$

$$\leq c^{3/p} \quad \text{vrai} \quad \max |M(t)| \, \|E(T)\, x\| = c^{3/p} \quad \text{vrai} \quad \max |M(t)| \, \|x\|$$

où on a tenu compte du fait que $E = \{E(\sigma)\}_{\sigma \in B}$ étant mesure spectrale, vérifie la relation $E(T) = I$. S'appuyant sur ces faits on peut maintenant achever la preuve du théorème de la même manière que pour les mesures spectrales orthogonales dans espaces de Hilbert.

Remarque. – Dans le cas où les fonctions M_1, M_2 dans (10) sont essentiellement positives alors on a évidemment même égalité au lieu des inclusions.

3. On désigne par $\widehat{\mathfrak{D}}_M^E$ l'espace de Banach obtenu en complétant $\mathfrak{D}_M^E = D(U_{M^{1/p}})$ pour la norme $\|x\|_M = \|U_{M^{1/p}}\, x\|$. Soit $F = \{F(\sigma)\}_{\sigma \in B}$ une mesure spectrale de type p sur un autre espace de Banach $\mathfrak{Y}$. Pour un opérateur linéaire continu π de $\widehat{\mathfrak{D}}_M^E$ dans $\widehat{\mathfrak{D}}_M^F$ on désignera sa norme par $\|\pi\|_M$. On dit que la fonction $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ positive et continue sur $(0, \infty) \times (0, \infty)$ est une fonction d'interpolation d'ordre p si $\{\widehat{\mathfrak{D}}^E_{\Phi(M_0, M_1)}, \widehat{\mathfrak{D}}^F_{\Phi(M_0, M_1)}\}$ est une couple d'espaces d'interpolation pour $\{\mathfrak{D}^E_{M_i}, D^F_{M_i}\}$ $(i = 0, 1)$ (voir [2]).

Soit $\mathfrak{I}_{1/(p-1)}$ la classe des fonctions positives $\varphi(\lambda)$, définies sur $(0, \infty)$ avec la propriété:

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)^{1/(p-1)}} = \int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{(1 + \lambda s)^{1/(p-1)}}$$

où ν est une mesure sur $(0, \infty)$, dépendant de φ et telle que:

$$\int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{(1 + s)^{1/(p-1)}} < \infty .$$

THÉORÈME 3. – *Toute fonction* $\Phi(\lambda_0, \lambda_1)$ *avec* $\Phi(1, \lambda) \in \mathfrak{I}_{1/(p-1)}$ *homogène de degré 1 est une fonction d'interpolation. De plus, on a*

$$\|\pi\|_{\Phi(M_0, M_1)} \leq c_E^{8/p} \, c_F^{11/p} \sup \left(\|\pi\|_{M_0}, \|\pi\|_{M_1} \right)$$

où c_E *et* c_F *sont les constantes intervenant dans la définition du type p des mesures spectrales* $E = \{E(\sigma)\}_{\sigma \in B}$ *et* $F = \{F(\sigma)\}_{\sigma \in B}$.

Ce théorème est la version du théorème d'interpolation de [2] dans le cas plus général où $c_E \neq 1 \neq c_F$. Comme en s'appuyant sur le théorème 2 on peut donner au théorème 3 la même preuve que celle donnée dans [2], nous nous contentons de renvoyer le lecteur à ce travail.

BIBLIOGRAFIE.

[1] N. DUNFORD, *A survey of the theory of spectral operators*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *64*, 217–274 (1958).

[2] C. FOIAŞ et J. L. LIONS, *Sur certains théorèmes d'interpolation* « Acta Sci. Math.», *22*, 269–282 (1961).

[3] C. MCCARTHY, *Commuting Boolean algebras of projections*. « Proc. Amer. Math. Soc. », *15*, 781–787 (1964).

[4] J. WERMER, *Commuting spectral measures on Hilbert spaces*. « Pacif. J. Math », *4* (1954).

[5] J. DIXMIER, *Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications*. « Acta. Sci. Math. », *12*, 213–227 (1950).