Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sorin Gogonea

Sur un problème de Riemann à singularités données

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.5, p. 526–529.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_5_526_0>

Analisi matematica. — *Sur un problème de Riemann à singularités données.* Nota di SORIN GOGONEA, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Si risolve il problema di Riemann per il caso dei contorni aperti, supponendo che la funzione cercata abbia nel suo campo di definizione delle singolarità isolate. La soluzione ottenuta per una via diretta generalizza quella di [1].

1. Soient dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$ les courbes ouvertes et disjointes L_j $(j = 1, 2, \cdots, p)$, douées d'une tangente continue et dont les extremités sont les points A_j et B_j ayant les affixes a_j et b_j respectivement. Sur chaque L_j on choisit comme sens de parcours direct, celui de A_j à B_j. Désignons par L la réunion des courbes L_j et par E l'ensemble de $2p$ points A_j et B_j, les affixes des points de E, considérés dans un ordre arbitraire, étant notés par c_k $(k = 1, 2, \cdots, 2p)$. Soit ensuite $\mathfrak{D}$ le plan z muni des coupures pratiquées sur les courbes L_j.

Dans cette Note nous allons considérer le problème suivant: $\Phi_0(z)$ étant une fonction uniforme, définie dans tout le plan à l'exception de l'ensemble S de ses singularités isolées (pôles où points singuliers éssentiels), déterminer une fonction $\Phi(z)$ dans $\mathfrak{D}$ telle que:

a) $\Phi_0(z)$ soit la partie principale de $\Phi(z)$, donc la différence

$$h(z) = \Phi(z) - \Phi_0(z) \tag{1}$$

est holomorphe partout en $\mathfrak{D}$;

b) $\Phi(z)$ est continûement prolongeable sur $L - E$, c'est-à-dire éxistent les valeurs limites $\Phi^+(\zeta)$ et $\Phi^-(\zeta)$ de $\Phi(z)$, obtenues en supposant que z tend vers $\zeta \in L - E$ sur des chemins qui se trouvent à gauche, respectivement à droite de L par rapport au sens de parcours choisi.

c) Dans le voisinage des points de E on a

$$|\Phi(z)| < \frac{\mathrm{Cte}}{|z - c_k|^\alpha}, \qquad \alpha \in (0, 1). \tag{2}$$

d) Sur $L - E$ doit être remplie la condition

$$\Phi^+(\zeta) = G(\zeta)\,\Phi^-(\zeta) + g(\zeta), \tag{3}$$

où $G(\zeta)$ et $g(\zeta)$ sont des fonctions höldériennes sur chaque courbe L_j.

2. On peut évidemment résoudre ce problème en le réduisant au problème de Riemann sans singularités pour la fonction $h(z)$ et en utilisant les procédés de N. I. Mouskhélichvili, [1], où de F. D. Gahow, [2]. Mais il nous semble utile de chercher la solution d'une façon directe sans recourir à la modi-

(*) Nella seduta del 10 maggio 1969.

fication de la condition aux limites (3). On peut obtenir de la sorte une généralisation très simple de la solution du problème sans singularités et qui a de plus l'avantage de séparer la solution en deux parties bien distinctes, l'une qui contient toutes les singularités et l'autre qui s'exprime seulement par l'intermédiaire des $G(\zeta)$ et $g(\zeta)$ et qui est nulle identiquement pour $g(\zeta) \equiv 0$. Sous cette forme la solution est particulièrement commode dans les application où l'on rencontre des problèmes homogènes.

Dans ce but nous allons utiliser un procédé dû à C. Jacob, [3] et que nous avons égalemment appliqué dans l'étude de certaines problèmes de Hilbert à singularites données, [4].

3. Soit $X(z)$ la solution canonique du problème de Riemann (3) homogène, sans singularités, pour le domaine $\mathfrak{D}$, de classe $h(c_1, c_2, \cdots, c_r)$ et ayant l'indice $\varkappa$. $X(z)$ est donc une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$, sauf peut-être pour $z=\infty$, où elle est d'ordre minime, satisfaisant à la condition aux limites $X^+(\zeta) = G(\zeta)\,X^-(\zeta)$, $\zeta \in L - E$, et qui est bornée dans le voisinage des points $c_l \in E$ $(l = 1, 2, \cdots, r \leq 2p)$, donnés à l'avance, [1]. Alors la condition (3) peut être mise sous la forme

$$\frac{\Phi^+(\zeta)}{X^+(\zeta)} - \frac{\Phi^-(\zeta)}{X^-(\zeta)} = \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)}, \tag{4}$$

et de cette façon on met en évidence la fonction

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z)}{X(z)}, \tag{5}$$

dont les propriétés seront étudiées en détail.

Puisque $\Psi(z)$ possède des singularités en $\mathfrak{D}$, et en tenant compte de son expression dans le cas où $\Phi(z)$ est régulière, [1], on peut écrire

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} + Q_\varkappa(z) + \Psi_0(z), \tag{6}$$

où $Q_\varkappa(z)$ est un polynôme arbitraire de degré $\varkappa$ si $\varkappa \geq 0$ et $\Psi_0(z)$ une fonction ayant des singularités dans les points de S et qui doit être déterminée.

Compte tenu de (4), (5) et des formules de Plemelj, il est évident que de (6) il résulte

$$\Psi_0^+(\zeta) - \Psi_0^-(\zeta) = 0, \qquad \zeta \in L - E. \tag{7}$$

Soit ensuite $M(z)$ la somme des parties principales de la fonction $\Phi_0(z)/X(z)$ relativement à toutes ses singularités, et posons

$$\frac{\Phi_0(z)}{X(z)} = M(z) + H(z). \tag{8}$$

Il s'ensuit que $H(z)$ est holomorphe et de (1), (5), (6) et (8) on déduit

$$\Psi_0(z) = M(z) + H(z) + \frac{h(z)}{X(z)} - Q_\varkappa(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{9}$$

Il est bien connu, [1], que $[X(z)]^{-1}$ possède à l'infini un pôle d'ordre $\varkappa$ si $\varkappa \geq 0$ et un zéro de multiplicité $-\varkappa$ si $\varkappa < 0$. Compte tenu que $h(z)$ et $H(z)$ sont holomorphes, il s'ensuit de (9) que la somme des parties principales de $\Psi_0(z)$ sera $M(z) + Q^*_\varkappa(z)$, où $Q^*_\varkappa(z)$ est un polynôme de degré $\varkappa$ si $\varkappa \geq 0$, égal à zéro si $\varkappa < 0$. Donc la différence $\Psi_0(z) - M(z)$ est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{D}$ sauf peut-être pour $z = \infty$, où elle est d'ordre $\varkappa$ si $\varkappa \geq 0$. Ensuite compte tenu de (7) et du fait que $M(z)$ est continue sur L, il est évident que $\Psi_0^+(\zeta) - M^+(\zeta) = \Psi_0^-(\zeta) - M^-(\zeta)$. Il s'ensuit que $\Psi_0(z) - M(z) = \tilde{Q}_\varkappa(z)$, où $\tilde{Q}_\varkappa(z)$ est de même un polynôme de degré $\varkappa$ si $\varkappa \geq 0$ et une constante si $\varkappa < 0$. Alors de (5) et (6) il résulte

$$\Phi(z) = X(z)[M(z) + P_\varkappa(z)] + \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{10}$$

où $P_\varkappa(z)$ est un polynôme de même type que $Q_\varkappa(z)$.

Le premier terme de (10) représente la solution générale du problème homogène et il est important de remarquer que l'existence des singularités se manifeste seulement dans ce terme. En conséquence la solution du problème homogène s'obtient sans d'autres quadratures sauf celles nécessaires à la détermination de la solution canonique. Si $\Phi_0(z) = 0$, on retrouve la solution obtenue dans [1].

4. Il est facile de prouver que la solution (10) satisfait aux conditions imposées. La condition *b*) ne nécessite aucune discution, compte tenu de la signification des fonctions qui interviennent dans (10). Ensuite puisque (10) diffère de la solution de [1] seulement par le terme $X(z)M(z)$, $M(z)$ étant continue dans les points de E, $\Phi(z)$ est effectivement de classe $h(c_1, c_2, \cdots, c_r)$, c'est-à-dire elle est bornée dans le voisinage des points $c_1, c_2, \cdots, c_r$ et satisfait dans le voisinage de toutes les autres extrémités la condition (2).

Il nous reste à vérifier que la condition *a*) est de même remplie. De (8) et (10) on obtient

$$h(z) = X(z)\left[P_\varkappa(z) - H(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right]. \tag{11}$$

Si $\varkappa \geq 0$, vu que $X(z)$ est régulière dans $\mathfrak{D}$ et a un zéro de multiplicité $\varkappa$ à l'infini, il résulte de (11) que $h(z)$ est holomorphe et en conséquence $\Phi(z)$ a seulement les singularités désirées. Par contre si $\varkappa < 0$, $X(z)$ a un pôle d'ordre $-\varkappa$ à l'infini et donc $\Phi(z)$ elle-même possède cette singularité suplémentaire. Pour qu'elle disparaisse il faut et il suffit que la parenthèse qui multiplie $X(z)$ (où maintenant $P_\varkappa = K =$ constante) ait à l'infini un zéro de multiplicité $-\varkappa$. Supposons que dans le voisinage du point à l'infini l'on ait le développement

$$M(z) - \frac{\Phi_0(z)}{X(z)} + K = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j z^{-j}. \tag{12}$$

Alors la solution (10) sera bornée à l'infini si et seulement si

$$\begin{cases} \nu_0 = 0 \\ \nu_s - \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_L \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)} \zeta^{s-1} d\zeta = 0, \qquad s = 1, 2, \cdots, -\varkappa - 1. \end{cases} \tag{13}$$

Si l'on prend la constante arbitraire K égale à zéro il en résulte de (12) que $\nu_0 = 0$. Alors l'accomplissement des autres conditions (12) assure l'unicité de la solution. En effet soit $\Phi_j(z)$, $(j = 1, 2)$, deux solutions ayant la même partie principale $\Phi_0(z)$. Alors $\Phi_1(z) - \Phi_2(z)$ sera une solution holomorphe satisfaisant la condition (3) avec $g(\zeta) = 0$ et de (10) il s'ensuit que $\Phi_1(z) - \Phi_2(z) = 0$.

Dans un autre travail nous allons utiliser les résultats ci-dessus à l'étude de certaines problèmes à singularités données de type Dirichlet et de type mixte pour le plan muni des coupures rectilignes.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equation*. Groningen 1953.
[2] F. D. GAKHOV, *Boundary Value Problems*. Pergamon Press, 1966.
[3] C. JACOB, « Revue Roumaine Math. Pures et Appl. », V, nr. 1, 5–19 (1960).
[4] S. GOGONEA, « C. R. Acad. Sc. Paris », *268*, 210–213 (1969).