Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Michele Capurso

Principi di minimo per la soluzione incrementale dei problemi elasto-plastici. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.4, p. 417–425.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_417_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Meccanica. — *Principi di minimo per la soluzione incrementale dei problemi elasto-plastici.* Nota I di MICHELE CAPURSO, presentata (*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — In order to solve the boundary value problem for an elastic-plastic continuum subjected to specified rates of body forces, surface tractions and surface displacements, a minimum principle is formulated.

For elastic-plastic materials such a principle is expressed by the statement that the differential total energy attains a minimum for the actual displacement rate and plastic distorsions rate.

In this Note the minimum principle is formulated for elastic-perfectly plastic solids with regular yield surface.

La definizione dello stato di tensione e di deformazione in un corpo elasto–plastico soggetto ad un dato programma di carico statico può essere perseguita solo per via incrementale determinando per ogni incremento delle azioni deformanti esterne i corrispondenti incrementi delle tensioni e delle deformazioni interne. I legami costitutivi fra tensioni e deformazione per materiali aventi tali caratteristiche si possono formulare infatti solo in forma variata riferendosi cioè agli incrementi di deformazione e non al valore globale della deformazione in atto.

Seguendo tale impostazione, e indicando con $\dot{\varepsilon}_{ij}$ le variazioni delle componenti di deformazione a partire da una qualsiasi configurazione deformata iniziale, si pongono tali variazioni nella forma:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \tag{1}$$

somma della parte elastica $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ e di quella plastica $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$. Per la parte elastica, dette $\dot{\sigma}_{ij}$ le variazioni delle componenti di tensione, si ha il classico legame:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \mathrm{A}_{ijkl}\, \dot{\sigma}_{kl} \tag{2}$$

con A_{ijkl} tensore dei coefficienti elastici.

Per la parte plastica bisogna invece distinguere i due casi di materiale elastico–perfettamente plastico e di materiale elastico–incrudente.

Nel primo caso, e cioè nell'ipotesi di perfetta plasticità, è necessario definire nello spazio delle tensioni una superficie di snervamento:

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \tag{3}$$

i cui punti interni definiscono il dominio degli stati di tensione elastici. La suddetta superficie, convessa per i materiali stabili [1], rappresenta una

(*) Nella seduta del 19 aprile 1969.

(1) D. C. DRUCKER, *A more fundamental approach to plastic stress–strain relations*, Proc. Ist. V. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1951.

frontiera invalicabile per gli stati tensionali del corpo e risulta indipendente dalle vicissitudini subite dal materiale in qualsiasi programma di carico. Le componenti della deformazione plastica $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$, restano in tal caso definite dalle relazioni:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \tag{4}$$

essendo

$$\begin{array}{llll} \dot{\lambda} = 0 & \text{se } f < 0 & \text{o } f = 0 & \text{ed } \dot{f} < 0 \\ \dot{\lambda} > 0 & \text{se } f = 0 & \text{ed } \dot{f} = 0 \,, & \end{array} \tag{5}$$

Nel secondo caso, materiale incrudente, la superficie di snervamento si evolve con l'evolversi dello stato di deformazione del corpo e può porsi:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \tag{6}$$

essendo h una funzione definita positiva delle σ_{ij}, e:

$$\begin{array}{llll} \dot{\lambda} = 0 & \text{se } f < 0 & \text{o } f = 0 & \text{ed } \dot{f} \leq 0 \text{ (2)} \\ \dot{\lambda} = \dot{f} & \text{se } f = 0 & \text{ed } \dot{f} > 0 & \end{array} \tag{7}$$

Precisati così i legami costitutivi le variazioni $\dot{\sigma}_{ij}$ delle tensioni interne possono ottenersi per inversione delle (2) nella forma:

$$\dot{\sigma}_{kl} = B_{klij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} \tag{8}$$

essendo le $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ deducibili dalle (1), (4) e (6) secondo le relazioni:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \tag{9}$$

nel caso perfettamente plastico, e:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \dot{\varepsilon}_{ij} - h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \tag{10}$$

per i corpi incrudenti.

D'altra parte se ci si pone nell'ipotesi di piccola deformazione e piccoli spostamenti gli incrementi di deformazione $\dot{\varepsilon}_{ij}$ totali possono esprimersi in funzione degli incrementi di spostamento $\dot{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ nella forma ben nota:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \tag{11}$$

e si ha pertanto dalla (9):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \tag{12}$$

(2) Nelle (7) la quantità $\dot{f}$ è da intendersi come variazione della f rispetto alle σ_{ij} soltanto. Nel caso dei corpi incrudenti quindi tale quantità dovrebbe indicarsi come $\dot{f}_{\sigma}$.

per il corpo perfettamente plastico, e dalla (10):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) - h\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\lambda} \tag{13}$$

per il corpo incrudente.

In entrambi i casi è immediato riconoscere la dipendenza lineare delle $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ e dunque delle $\dot{\sigma}_{ij}$ dagli incrementi di spostamento $\dot{u}_i$ e dall'intensità istantanea della distorsione plastica $\dot{\lambda}$.

Si supponga ora che il corpo si trovi in una configurazione intermedia C in cui agiscono le forze di massa X_i, le forze superficiali p_i sulla porzione S_p della frontiera essendo u_{i0} gli spostamenti subiti dalla restante parte S_u del contorno.

Posto che sia noto lo stato tensionale σ_{ij} corrispondente a tale configurazione, è possibile distinguere il volume V del corpo nella parte elastica V_e ed in quella alle soglie dello snervamento V_p.

Nella parte elastica V_e si ha infatti:

$$f(\sigma_{ij}) < 0 \tag{14}$$

mentre nella parte alle soglie dello snervamento si verifica la relazione:

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \tag{15}$$

Se a partire da tale situazione nota si pensa di assoggettare il solido agli incrementi di azioni deformanti $\dot{X}_i$ nel volume V, $\dot{p}_i$ sulla frontiera S_p e $\dot{u}_{i0}$ sulla frontiera S_u, lo stato di tensione σ_{ij} ed il regime di spostamenti corrispondenti u_i variano delle quantità infinitesime $\dot{\sigma}_{ij}$ ed $\dot{u}_i$.

È evidente che, per l'equilibrio, in tutti i punti del volume V sussistono le equazioni:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{X}_i = 0 \tag{16}$$

mentre sulla frontiera S equilibrio e congruenza richiedono che sia:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} n_j &= \dot{p}_i \qquad \text{in } S_p \\ \dot{u}_i &= \dot{u}_{i0} \qquad \text{in } S_u \end{aligned} \tag{17}$$

Scopo della presente nota è dimostrare che assumendo come incognite puntuali le quattro funzioni:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \dot{u}_i(x_j) \qquad (i, j = 1, 2, 3) \\ \dot{\lambda} &= \dot{\lambda}(x_j) \end{aligned} \tag{18}$$

la soluzione può determinarsi attraverso un principio di minimo che porge le (18) come minimanti di un funzionale quadratico nel sottospazio delle incognite $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$ delimitato dalle condizioni:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i0} \quad \text{in } S_u \qquad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{in } V_p. \tag{19}$$

È qui opportuno precisare che la condizione implicitamente posta con la (3) sulla regolarità della superficie di snervamento puntuale non è limitativa per il principio suddetto, che viene infatti esteso poi anche al caso delle superfici di snervamento con punti singolari.

In questa prima Nota il principio viene dimostrato per i corpi elastici–perfettamente plastici. Il caso dei corpi incrudenti e la generalizzazione per i corpi con superficie di snervamento singolare saranno considerati nella Nota II.

1. Si consideri il lavoro per unità di volume compiuto dagli incrementi di tensione $\dot{\sigma}_{ij}$ per gli incrementi di deformazione elastica $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$:

$$\Phi = \frac{1}{2}\,\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}\,. \tag{20}$$

Tale lavoro, tenendo presenti le (8), può porsi nella forma:

$$\Phi = \frac{1}{2}\,B_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}\,\dot{\varepsilon}_{kl}^{e} \tag{21}$$

e risulta essere una funzione quadratica definita positiva delle componenti dell'incremento di deformazione elastica $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$. Per la sua stessa definizione Φ risulta essere funzione potenziale degli incrementi di tensione $\dot{\sigma}_{ij}$ essendo:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}}\,. \tag{22}$$

Tenendo presenti le (12), dalla (21) discende che Φ può porsi nella forma:

$$\Phi = \frac{B_{ijkl}}{2}\left[\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}) - \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\,\dot{\lambda}\right]\left[\frac{1}{2}(\dot{u}_{k,l}+\dot{u}_{l,k}) - \frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\,\dot{\lambda}\right]$$

e risulta quindi essere un funzionale quadratico definito positivo o semidefinito positivo (3) degli incrementi di spostamento $\dot{u}_i$ e degli incrementi di distorsione plastica $\dot{\lambda}$.

È qui opportuno precisare che gli spostamenti $\dot{u}_i$, risultano definiti in tutto il volume V del corpo senza alcuna limitazione in segno mentre le

(3) In alcuni casi il funzionale Φ può assumere valore nullo per valori non nulli delle variabili $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$. È infatti possibile pensare in generale che per particolari distribuzioni delle tensioni σ_{ij} si possano imprimere al corpo degl'incrementi di spostamento $\dot{u}_i$ congruenti in S_u e di distorsioni plastiche positive in V_p, tali che risulti ovunque:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}) - \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\,\dot{\lambda} = 0\,.$$

Data la linearità di tale relazione omogenea è evidente che se $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$ rappresentano un insieme di variabili che soddisfa la condizione $\Phi = 0$, anche l'insieme $\rho\dot{u}_i$, $\rho\dot{\lambda}$ con ρ costante arbitraria la soddisfa. Ciò significa che nell'iperspazio delle variabili $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$, Φ presenta valori nulli lungo una iper–retta.

Un esempio classico in cui si verifica tale circostanza si ha quando i carichi esterni attingono il valore corrispondente al carico di collasso teorico del corpo. Tale circostanza può però presentarsi anche per carichi inferiori a quelli di collasso. In ogni caso, ogni qualvolta ciò si verifica, il funzionale Φ risulta essere semidefinito positivo.

distorsioni plastiche $\dot{\lambda}$ risultano definite solo nella porzione V_p del corpo con la limitazione in segno:

$$\dot{\lambda}(x_i) \geq 0 . \tag{23}$$

Si definisca ora il funzionale:

$$M_p = \int_V \Phi(\dot{\varepsilon}_{ij}^e)\, dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i\, dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i\, dS \tag{24}$$

che per quanto detto in merito alla Φ risulta essere un funzionale quadratico di $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$

La relazione:

$$M_p = M_p(\dot{u}_i, \dot{\lambda}) \tag{25}$$

può dunque intendersi espressione analitica di un'ipersuperficie nell'iperspazio delle variabili $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$.

Ci si proponga ora di determinarne le proprietà geometriche.

A tal fine si comincia coll'osservare che detti $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$ un qualsiasi insieme di variabili definite nei rispettivi campi V e V_p, ed $\dot{u}_i^*$, $\dot{\lambda}^*$ un ulteriore insieme tale che:

$$\dot{u}_i^* = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i \quad , \quad \dot{\lambda}^* = \dot{\lambda} + \Delta\dot{\lambda} \tag{26}$$

con $\Delta\dot{u}_i$, $\Delta\dot{\lambda}$ variazioni finite delle variabili indipendenti, può porsi:

$$M_p^* = M_p + \Delta M_p \tag{27}$$

essendo ΔM_p la variazione finita che il funzionale (24) subisce per effetto delle variazioni $\Delta\dot{u}_j$, $\Delta\dot{\lambda}$ delle variabili indipendenti.

Osservando ora che in virtù della (20), la (24) può scriversi nella forma:

$$M_p = \frac{1}{2}\int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e\, dV - \int_V \dot{X}_i \dot{u}_i\, dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i\, dS \tag{28}$$

risulta immediato dedurre che si ha:

$$M_p^* = M_p + \Delta M_p = \frac{1}{2}\int_V (\dot{\sigma}_{ij} + \Delta\dot{\sigma}_{ij})(\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \Delta\dot{\varepsilon}_{ij}^e)\, dV + \tag{29}$$

$$- \int_V \dot{X}_i (\dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i)\, dV - \int_{S_p} \dot{p}_i (\dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i)\, dS$$

essendo $\Delta\dot{\sigma}_{ij}$ e $\Delta\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ le variazioni di $\dot{\sigma}_{ij}$ ed $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ collegate alle variazioni $\Delta\dot{u}_i$, $\Delta\dot{\lambda}$.

Dal confronto fra (28) e (29) si trae quindi immediatamente:

$$\Delta M_p = \frac{1}{2}\int_V (\dot{\sigma}_{ij} \Delta\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \Delta\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \Delta\dot{\sigma}_{ij} \Delta\dot{\varepsilon}_{ij}^e)\, dV - \int_V \dot{X}_i \Delta\dot{u}_i\, dV - \int_{S_p} \dot{p}_i \Delta\dot{u}_i\, dS. \tag{30}$$

Sussistendo peraltro la (8), è immediato dedurre che risulta:

$$\Delta\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}\,\Delta\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}\,. \tag{31}$$

La (30) può quindi porsi nella forma:

$$\Delta M_p = \int_V \dot{\sigma}_{ij}\,\Delta\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}\,dV + \frac{1}{2}\int_V \Delta\dot{\sigma}_{ij}\,\Delta\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}\,dV - \int_V \dot{X}_i\,\Delta\dot{u}_i\,dV - \int_{S_p} \dot{p}_i\,\Delta\dot{u}_i\,dS\,. \tag{32}$$

D'altra parte poiché dalla (9) risulta:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = \Delta\dot{\varepsilon}_{ij} & \text{in } V_e \\ \Delta\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = \Delta\dot{\varepsilon}_{ij} - \dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\,\Delta\dot{\lambda} & \text{in } V_p \end{cases} \tag{33}$$

discende dalla (32) l'espressione:

$$\Delta M_p = \int_V \dot{\sigma}_{ij}\,\Delta\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV - \int_{V_p} \dot{\sigma}_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\,\Delta\dot{\lambda}\,dV + \frac{1}{2}\int_V \Delta\dot{\sigma}_{ij}\,\Delta\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}\,dV - \tag{34}$$
$$- \int_V \dot{X}_i\,\Delta\dot{u}_i\,dV - \int_{S_p} \dot{p}_i\,\Delta\dot{u}_i\,dS$$

che, tenuto conto della relazione:

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\,\dot{\sigma}_{ij} = \dot{f}(\sigma_{ij}) \tag{35}$$

può porsi nella forma definitiva:

$$\Delta M_p = \int_V \dot{\sigma}_{ij}\,\Delta\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV - \int_V \dot{X}_i\,\Delta\dot{u}_i\,dV - \int_{S_p} \dot{p}_i\,\Delta\dot{u}_i\,dS + \tag{36}$$
$$- \int_{V_p} \dot{f}\,\Delta\dot{\lambda}\,dV + \frac{1}{2}\int_V \Delta\dot{\sigma}_{ij}\,\Delta\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}\,dV\,.$$

La (36) rappresenta così l'espressione ultima della variazione finita che il funzionale M_p subisce a partire dal valore corrispondente ad un punto P qualsiasi di coordinate $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$ per effetto delle variazioni finite $\Delta\dot{u}_i$, $\Delta\dot{\lambda}$.

Si supponga ora che il punto P a partire dal quale s'imprimono le variazioni $\Delta\dot{u}_i$, $\Delta\dot{\lambda}$ sia il punto corrispondente alla soluzione reale del problema elasto–plastico. In tal caso le $\dot{\sigma}_{ij}$ sono in equilibrio con le variazioni di azione esterna $\dot{X}_i$, $\dot{p}_i$ e pertanto il principio dei lavori virtuali richiede che sia:

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}\,\Delta\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV - \int_V \dot{X}_i\,\Delta\dot{u}_i\,dV - \int_{S_p} \dot{p}_i\,\Delta\dot{u}_i\,dS = 0 \text{ [4]}. \tag{37}$$

(4) Affinché la (37) sia verificata è necessario che risulti:

$$\Delta\dot{u}_i = 0 \qquad \text{in } S_u$$

e cioè che gli spostamenti $\dot{u}_i$ siano sempre scelti nella classe che soddisfa le condizioni:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i0} \qquad \text{in } S_u\,.$$

Si trae quindi dalla (36) per la variazione ΔM_p impressa a partire da tale punto:

$$\Delta M_p = -\int_{V_p} \dot{f} \Delta\dot{\lambda}\, dV + \frac{1}{2}\int_V \Delta\dot{\sigma}_{ij}\, \Delta\dot{\varepsilon}^e_{ij}\, dV. \tag{38}$$

È evidente peraltro che per effetto degli incrementi $\dot{X}_i, \dot{p}_i, \dot{u}_{io}$, non tutto il volume V_p alla soglia dello snervamento subisce deformazioni plastiche. In generale deve infatti pensarsi che una parte di esso che diremo V_{pp} permane allo stato plastico mentre l'ulteriore aliquota V_{pe} ritorna in fase elastica. Le due aliquote sono caratterizzate dal verificarsi delle relazioni:

$$\begin{cases} \dot{f} = 0 & \dot{\lambda} > 0 \quad \text{in } V_{pp} \\ \dot{f} < 0 & \dot{\lambda} = 0 \quad \text{in } V_{pe}. \end{cases} \tag{39}$$

È evidente pertanto che la prima delle (39) consente di scrivere la (38) nella forma:

$$\Delta M_p = -\int_{V_{pe}} \dot{f} \Delta\dot{\lambda}\, dV + \frac{1}{2}\int_V \Delta\dot{\sigma}_{ij}\, \Delta\dot{\varepsilon}^e_{ij}\, dV. \tag{40}$$

D'altra parte essendo in V_{pe} $\dot{\lambda} = 0$ è evidente che, dovendosi restringere l'analisi al sottospazio (23), ivi deve porsi:

$$\Delta\dot{\lambda} \geq 0 \tag{41}$$

La seconda delle (39) congiuntamente alla (41) dimostra pertanto che in V_{pe} deve necessariamente verificarsi la relazione:

$$\dot{f} \Delta\dot{\lambda} \leq 0. \tag{42}$$

Discende da ciò che:

$$\int_{V_{pe}} \dot{f} \Delta\dot{\lambda}\, dV \leq 0. \tag{43}$$

D'altra parte, ricordando la (20) e quanto rilevato nella nota (3), è immediato constatare che:

$$\frac{1}{2}\int_V \Delta\dot{\sigma}_{ij}\, \Delta\dot{\varepsilon}^e_{ij}\, dV = \int_V \Phi\, (\Delta\dot{\varepsilon}^e_{ij})\, \Delta V \geq 0 \tag{44}$$

e si deduce quindi dalla (40), tenendo presenti le (43) e (44) che:

$$\Delta M_p \geq 0 \tag{45}$$

per tutte le variazioni dei parametri $\Delta\dot{u}_i$, $\Delta\dot{\lambda}$ contenute nel sottospazio $\dot{\lambda} \geq 0$.

È necessario ora rilevare che la condizione (45) non garantisce l'unicità della soluzione in quanto tale relazione garantisce solo che il valore di M_p corrispondente alla soluzione è il valore più piccolo relativo all'iperspazio $\dot{\lambda} \geq 0$.

Possono infatti esistere infiniti insiemi di variabili $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$ che corrispondono a tale valore minimo poiché ΔM_p può essere nullo lungo una o più delle iper–rette del fascio che partono da un punto soluzione.

La condizione:

$$\Delta M_p = 0 \tag{46}$$

è infatti ottenibile solo per particolari distribuzioni di $\Delta\dot{u}_i$ e $\Delta\dot{\lambda}$ che soddisfano le condizioni:

$$\Delta\dot{\lambda} = 0 \quad \text{in } V_{pe} \quad \text{e} \quad \Delta\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = 0 \quad \text{in } V \tag{47}$$

per la nullità degli integrali (43) e (44).

La seconda delle (47) comporta peraltro che risulti:

$$\frac{1}{2}(\Delta\dot{u}_{i,j} + \Delta\dot{u}_{j,i}) - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Delta\dot{\lambda} = 0 \tag{48}$$

e ciò conduce ad asserire, per la linearità, che se $\tilde{\Delta}\dot{u}_i$, $\tilde{\Delta}\dot{\lambda}$ sono soluzioni della (48), lo sono anche $\rho\tilde{\Delta}\dot{u}_i$, $\rho\tilde{\Delta}\dot{\lambda}$ con ρ costante arbitraria. Possono così esistere infinite soluzioni che differiscono fra di loro delle quantità $\rho\tilde{\Delta}\dot{u}_i$, $\rho\tilde{\Delta}\dot{\lambda}$ che configurano una deformazione puramente plastica di ampiezza arbitraria del continuo. (Si ricordano quale esempio classico le infinite soluzioni relative al collasso plastico del corpo).

Poiché però alla seconda delle (47) si associa la relazione

$$\Delta\dot{\sigma}_{ij} = 0 \tag{49}$$

tutte le infinite soluzioni possibili corrispondono ad un'unica distribuzione dell'incremento di tensione $\dot{\sigma}_{ij}$ e portano quindi tutte allo stesso stato di tensione incrementato per l'analisi del passo successivo.

Risulta perciò irrilevante la scelta di una delle soluzioni fra le infinite eventuali possibili. In ogni caso una qualsiasi di esse può sempre trarsi sfruttando la condizione di minimo di M_p nel sottospazio $\dot{\lambda} \geq 0$ e cioè avvalendosi del seguente principio:

TEOREMA 1. *Fra tutti gl'insiemi di spostamenti* $\dot{u}_i$ *definiti in* V *nel rispetto delle condizioni cinematiche in* S_u *e di distorsioni plastiche* $\dot{\lambda}$ *definite positive in* V_p, *l'insieme (o gli insiemi) corrispondenti alla soluzione reale per il corpo elasto–plastico rendono* M_p *minimo nel sottospazio* $\dot{\lambda} \geq 0$.

La soluzione del problema viene così definita come ricerca di un minimo vincolato e può essere perseguita in forma iterativa avvalendosi dei mezzi della programmazione quadratica. La difficoltà principale consiste infatti nel non conoscersi a priori la suddivisione di V_p nella parte plastica V_{pp} e nella parte che ritorna elastica V_{pe}. In uno studio successivo si fornirà tuttavia un metodo iterativo elementare di sicura convergenza che consente di risolvere il problema con estrema semplicità. In alcuni casi tuttavia, per particolari leggi di variazione delle azioni sollecitanti esterne X_i, p_i, u_{io} può esser lecito pensare che il fenomeno dei ritorni elastici sia modesto e si può far riferimento quindi a soluzioni semplificate in cui si ponga:

$$V_{pe} = 0. \tag{50}$$

È evidente che in tale ipotesi la (40) diviene:

$$\Delta M_p = \frac{1}{2} \int_V \Delta\dot{\sigma}_{ij}\, \Delta\dot{\varepsilon}^e_{ij}\, dV \tag{51}$$

e si ha perciò:

$$\Delta M_p \geq 0 \tag{52}$$

per tutte le variazioni delle variabili $\dot{u}_i$, $\dot{\lambda}$ senza però alcuna limitazione al segno dei $\dot{\lambda}$.

In tale ipotesi pertanto la soluzione corrisponde al minimo assoluto di M_p nell'iperspazio di riferimento ed è quindi perseguibile per soluzione di un ordinario sistema di equazioni lineari [5].

Può quindi enunciarsi il seguente principio:

TEOREMA 2. *Fra tutti gl'insiemi di spostamenti $\dot{u}_i$ definiti in* V *nel rispetto delle condizioni cinematiche in* S_u *e di distorsioni plastiche* $\dot{\lambda}$ *definite in* V_p, *l'insieme o gli insiemi corrispondenti alla soluzione del problema, trascurando i ritorni elastici, rendono* M_p *minimo nell'iperspazio di riferimento.*

(5) Tale soluzione può peraltro ritenersi soluzione rigorosa per un corpo di tipo semplificato che presenti in luogo delle (5) le relazioni:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} \neq 0 & \text{se } f = 0 \\ \dot{\lambda} = 0 & \text{se } f < 0. \end{cases} \tag{53}$$