Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Capursi

Generalizzazione dell'operazione «parentesi quadra»

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.4, p. 373–378.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_373_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Geometria differenziale. — *Generalizzazione dell'operazione « parentesi quadra »* (*). Nota di MAURO CAPURSI, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY.—Let $\mathfrak{T}_0^r$ be the set of all differentiable tensor fields of type $(r, 0)$ defined on a differentiable manifold: in this paper the Author generalizes the bracket operation defined on $\mathfrak{T}_0^1$ and therefore he makes the direct sum of the family $(\mathfrak{T}_0^i)_{i \in \mathrm{N}}$ into a Lie algebra over the real number field.

1. Sia V una varietà differenziabile di classe C^∞ (1) e dimensione n e detta $\mathfrak{F}$ l'algebra delle funzioni differenziabili su V, siano $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{T}_0^r (r \in \mathrm{N})$ rispettivamente l'$\mathfrak{F}$–modulo dei campi vettoriali differenziabili su V e l'$\mathfrak{F}$–modulo dei campi tensoriali differenziabili su V di specie (r, o), essendo $\mathfrak{T}_0^0 = \mathfrak{F}$ e $\mathfrak{T}_0^1 = \mathfrak{X}$.

In questa nota si generalizza la nozione di operazione « parentesi quadra » definita su $\mathfrak{X}$, se ne determinano alcune proprietà e si munisce lo spazio vettoriale su R somma diretta della famiglia $(\mathfrak{T}_0^i)_{i \in \mathrm{N}}$ di una struttura di algebra di Lie.

2. Nel seguito, se $X \in \mathfrak{T}_0^r (r > 1)$, per ogni $f \in \mathfrak{F}$ e per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$, si denota con X_f^i il campo tensoriale (2) su V di specie $(r-1, 0)$ definito per ogni $(f_1, \cdots, f_{r-1}) \in \mathfrak{F}^{r-1}$ da

$$X_f^i (f_1, \cdots, f_{r-1}) = X(f_1, \cdots, f_{i-1}, f, f_i, \cdots, f_{r-1});$$

se poi $X \in \mathfrak{X}$, per ogni $f \in \mathfrak{F}$, si pone $X_f^1 = Xf$, mentre con S si indica la simmetrizzazione di $\mathfrak{T}_0^l (l \in \mathrm{N}^*)$.

Denotato con $\mathfrak{S}_m$ il gruppo delle permutazioni di $\{1, 2, \cdots, m\}$, se $(X, Y) \in \mathfrak{T}_0^r \times \mathfrak{T}_0^s (r \geq 1, s \geq 1)$, sia $[X, Y]$ l'applicazione di $\mathfrak{F}^{r+s-1}$ in $\mathfrak{F}$ defi-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Contratto di Ricerca del C.N.R. « Algebra, Geometria e Questioni connesse ».

(**) Nella seduta del 19 aprile 1969.

(1) Nel seguito si scriverà « differenziabile » in luogo di « differenziabile di classe C^∞ », e, quando non ci sarà possibilità d'equivoco, si ometterà anche la parola « differenziabile ».

(2) È noto che ogni $X \in \mathfrak{T}_0^r$ può essere considerato come un'applicazione R–multilineare di $\mathfrak{F}^r$ in $\mathfrak{F}$ tale che se $g_1, g_2 \in \mathfrak{F}$ per ogni $(f_1, \cdots, f_r) \in \mathfrak{F}^r$, con $f_i = g_1 g_2$ ed $1 \leq i \leq r$, risulta

$$X(f_1, \cdots, f_{i-1}, g_1 g_2, f_{i+1}, \cdots f_r) = g_1 X(f_1, \cdots, f_{i-1}, g_2, f_{i+1}, \cdots, f_r) + \\ + g_2 X(f_1, \cdots, f_{i-1}, g_1, f_{i+1}, \cdots, f_r).$$

nita per ogni $(f_1, \cdots, f_{r+s-1}) \in \mathfrak{F}^{r+s-1}$ da

$$[X, Y](f_1, \cdots, f_{r+s-1}) =$$

$$= \frac{1}{(r+s-1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s-1}} \left(\sum_{i=1}^{r} X^i_{Y(f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(s)})} (f_{\sigma(s+1)}, \cdots, f_{\sigma(r+s-1)}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{s} Y^j_{X(f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(r)})} (f_{\sigma(r+1)}, \cdots, f_{\sigma(r+s-1)}) \right).$$

Si verifica subito che $[X, Y]$ è un campo tensoriale su V di tipo $(r+s-1, 0)$ e che se X e Y sono campi vettoriali su V, $[X, Y]$ è il campo vettoriale determinato dalla legge di composizione « parentesi quadra » definita su $\mathfrak{X}$.

Si può subito dimostrare

PROP. 2.1. *Se* $(X^i)_{1 \le i \le r}$ *e* $(Y^j)_{1 \le j \le s}$ *sono* $r + s$ *campi vettoriali su* V, *si ha*

$$[X^1 \otimes \cdots \otimes X^r, Y^1 \otimes \cdots \otimes Y^s] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} S([X^i, Y^j] \otimes X^1 \otimes \cdots \otimes X^{i-1} \otimes X^{i+1} \otimes \cdots \otimes X^r \otimes Y^1 \otimes \cdots$$

$$\cdots \otimes Y^{j-1} \otimes Y^{j+1} \otimes \cdots \otimes Y^s).$$

PROP. 2.2. *Se* $X \in \mathfrak{T}^r_0$, $Y \in \mathfrak{T}^s_0$ *ed* $f, g \in \mathfrak{F}$ *si ha*

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f \sum_{i=1}^{r} S(X^i_g \otimes Y) - g \sum_{j=1}^{s} S(X \otimes Y^j_f). \tag{2.1}$$

Infatti per ogni $(f_1, \cdots, f_{r+s-1}) \in \mathfrak{F}^{r+s-1}$ risulta

$$[fX, gY](f_1, \cdots, f_{r+s-1}) =$$

$$= \frac{1}{(r+s-1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s-1}} \left(fg \sum_{i=1}^{r} X^i_{Y(f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(s)})} (f_{\sigma(s+1)}, \cdots, f_{\sigma(r+s-1)}) + \right.$$

$$+ f \sum_{i=1}^{r} Y(f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(s)}) X^i_g (f_{\sigma(s+1)}, \cdots, f_{\sigma(r+s-1)}) -$$

$$- fg \sum_{j=1}^{s} Y^j_{X(f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(r)})} (f_{\sigma(r+1)}, \cdots, f_{\sigma(r+s-1)}) -$$

$$\left. - g \sum_{j=1}^{s} X(f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(r)}) Y^j_f (f_{\sigma(r+1)}, \cdots, f_{\sigma(r+s-1)}) \right) =$$

$$= \left(fg[X, Y] + f \sum_{i=1}^{r} S(Y \otimes X^i_g) - g \sum_{j=1}^{s} S(X \otimes Y^j_f) \right) (f_1, \cdots, f_{r+s-1})$$

e quindi l'asserto.

Dalla (2.1) segue, in particolare, che se $X \in \mathfrak{T}_0^r$, $Y \in \mathfrak{T}_0^s$ ed $f \in \mathfrak{F}$ si ha

$$[fX, Y] = f[X, Y] - \sum_{i=1}^{s} S(X \otimes Y_f^i); \tag{2.2}$$

$$[X, fY] = f[X, Y] + \sum_{i=1}^{r} S(X_f^i \otimes Y).$$

È facile verificare che se $X, Z \in \mathfrak{T}_0^r$, $Y, T \in \mathfrak{T}_0^s$ ed $\alpha \in R$ sussistono le seguenti eguaglianze

$$[X, Y+T] = [X, Y] + [X, T]; \tag{2.3}$$

$$[X+Z, Y] = [X, Y] + [Z, Y]; \tag{2.4}$$

$$[\alpha X, Y] = [X, \alpha Y] = \alpha[X, Y]; \tag{2.5}$$

$$[X, Y] = -[Y, X]; \tag{2.6}$$

$$[X, X] = o;$$

$$[SX, Y] = [X, Y] = [X, SY]. \tag{2.7}$$

PROP. 2.3. *Se* A *è un aperto di* V *e se* $X \in \mathfrak{T}_0^r$ *o* $Y \in \mathfrak{T}_0^s$ *è nullo in* A, *allora anche* $[X, Y]$ *è nullo in* A.

È noto, infatti, che per ogni punto $p \in A$ esiste una funzione $f \in \mathfrak{F}$ che assume il valore o in p ed il valore 1 in ogni punto non appartenente ad A; supposto che X sia nullo in A, si ha $fX = X$ e quindi per la (2.2)

$$[X, Y] = [fX, Y] = f[X, Y] - \sum_{i=1}^{s} S(X \otimes Y_f^i)$$

da cui $[X, Y]_p = 0$.

Dall'arbitrarietà di p l'asserto.

Segue subito

PROP. 2.4. *Se* A *è un aperto di* V *e se* $X, X' \in \mathfrak{T}_0^r$, $Y, Y' \in \mathfrak{T}_0^s$ *e* $Z, Z' \in \mathfrak{T}_0^t$ *sono tali che* $X \mid A = X' \mid A$, $Y \mid A = Y' \mid A$ *e* $Z \mid A = Z' \mid A$, *risulta*

$$[X, Y] \mid A = [X', Y'] \mid A$$

e conseguentemente

$$[[X, Y], Z] \mid A = [[X', Y'], Z'] \mid A.$$

Si può verificare.

PROP. 2.5. *Se* $X \in \mathfrak{T}_0^r$, $Y \in \mathfrak{T}_0^s$ *e* $Z \in \mathfrak{T}_0^t$ *si ha*

$$[X \otimes Y, Z] = S(X \otimes [Y, Z] + Y \otimes [X, Z]). \tag{2.8}$$

La dimostrazione si omette per brevità.

PROP. 2.6. *Se* $(X^i)_{1\leq i\leq r}$, $(Y^j)_{1\leq j\leq s}$ *e* $(Z^l)_{1\leq l\leq t}$ *sono* $r+s+t$ *campi vettoriali su* V, *posto* $X = X^1 \otimes\cdots\otimes X^r$, $Y = Y^1\otimes\cdots\otimes Y^s$ *e* $Z = Z^1\otimes\cdots\otimes Z^t$, *si ha*

$$[[X , Y] , Z] + [[Y , Z] , X] + [[Z , X] , Y] = 0. \tag{2.9}$$

La (2.9) è vera per campi vettoriali cioè per $r = s = t = 1$ e la si dimostra per induzione nel caso di $s = t = 1$: si supponga pertanto verificata la (2.9) nel caso in cui X sia prodotto tensoriale di $r - 1 \geq 1$ campi vettoriali.

Se invece è $X = \bar{X}\otimes X^r$ con $\bar{X} = X^1\otimes\cdots\otimes X^{r-1}$, per le (2.7), (2.8) e per l'ipotesi d'induzione risulta

$$\begin{aligned}&[[X , Y] , Z] + [[Y , Z] , X] + [[Z , X] , Y] =\\ &\quad = S(\bar{X}\otimes([[X^r, Y] , Z] + [[Y , Z] , X^r] + [[Z , X^r] , Y])) +\\ &\quad + S(X^r\otimes([[\bar{X} , Y] , Z] + [[Y , Z] , \bar{X}] + [[Z , \bar{X}], Y])) = 0.\end{aligned}$$

Si deduce poi, operando analogamente per induzione prima rispetto ad s e poi rispetto a t, che la (2.9) è verificata per r, s e t qualunque.

Come conseguenza si dimostra

PROP. 2.7. *Se* $X \in \mathfrak{T}_0^r$, $Y \in \mathfrak{T}_0^s$ *e* $Z \in \mathfrak{T}_0^t$, *si ha*

$$[[X , Y] , Z] + [[Y , Z] , X] + [[Z , X] , Y] = 0. \tag{2.10}$$

Infatti se p è un punto di V, indicato con I l'insieme $\{1 , 2 ,\cdots, n\}$, esistono $n^{r-1} + n^{s-1} + n^{t-1} + n$ campi vettoriali su V

$$(\overset{\circ}{X}{}^{i_1\cdots i_{r-1}})_{(i_1,\cdots,i_{r-1})\in I^{r-1}} \quad , \quad (\overset{\circ}{Y}{}^{j_1\cdots j_{s-1}})_{(j_1,\cdots,j_{s-1})\in I^{s-1}} ,$$
$$(\overset{\circ}{Z}{}^{l_1\cdots l_{t-1}})_{(l_1,\cdots,l_{t-1})\in I^{t-1}} \quad , \quad (E_i)_{1\leq i\leq n}$$

ed un aperto A di V contenente p tali che posto

$$\bar{X} = E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_{r-1}}\otimes \overset{\circ}{X}{}^{i_1\cdots i_{r-1}} ,$$
$$\bar{Y} = E_{j_1}\otimes\cdots\otimes E_{j_{s-1}}\otimes \overset{\circ}{Y}{}^{j_1\cdots j_{s-1}} ,$$
$$\bar{Z} = E_{l_1}\otimes\cdots\otimes E_{l_{t-1}}\otimes \overset{\circ}{Z}{}^{l_1\cdots l_{t-1}}$$

risulti

$$\bar{X}\,|\,A = X\,|\,A \quad , \quad \bar{Y}\,|\,A = Y\,|\,A \quad , \quad \bar{Z}\,|\,A = Z\,|\,A.$$

Dalle proposizioni 2.4 e 2.6 segue allora che

$$\begin{aligned}&([[X , Y] , Z] + [[Y , Z] , X] + [[X , Z] , Y])_p =\\ &\quad = ([[\bar{X} , \bar{Y}] , \bar{Z}] + [[\bar{Y} , \bar{Z}] , \bar{X}] + [[\bar{Z} , \bar{X}] , \bar{Y}]_p = 0\end{aligned}$$

e quindi l'asserto.

Se $X \in \mathfrak{T}_0^r (r \geq 1)$ e se $g \in \mathfrak{F}$, sia $[X, g]$ il campo tensoriale su V di specie $(r-1, 0)$ così definito

$$(2.11) \qquad [X, g] = \sum_{i=1}^{r} (SX)_g^i ,$$

mentre se $f, g \in \mathfrak{F}$, si ponga

$$(2.12) \qquad [f, g] = 0$$

avendo denotato con o la funzione nulla su V.

Si porrà poi

$$[g, X] = -[X, g].$$

È ovvio che gli operatori definiti dalle (2.11) e (2.12) verificano proprietà analoghe a quelle espresse dalle (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6), inoltre valgono le seguenti proposizioni le cui dimostrazioni si omettono per brevità.

PROP. 2.8. *Se* A *è un aperto di* V *e se* $X, X' \in \mathfrak{T}_0^r$ *ed* $f, f' \in \mathfrak{F}$ *sono tali che* $X \mid A = X' \mid A$ *e* $f \mid A = f' \mid A$, *allora*

$$[X, f] \mid A = [X', f'] \mid A.$$

PROP. 2.9. *Se* $X \in \mathfrak{T}_0^r$, $Y \in \mathfrak{T}_0^s$ *ed* $f \in \mathfrak{F}$, *si ha*

$$[X \otimes Y, f] = S(X \otimes [Y, f] + Y \otimes [X, f]).$$

Da queste due proposizioni segue

PROP. 2.10. *Se* $X \in \mathfrak{T}_0^r$, $Y \in \mathfrak{T}_0^s$ *ed* $f, g \in \mathfrak{F}$, *risulta*

$$(2.13) \qquad [[X, Y], f] + [[Y, f], X] + [[f, X], Y] = 0$$

$$(2.14) \qquad [[X, f], g] + [[f, g], X] + [[g, X], f] = 0.$$

3. Si consideri la famiglia $(\mathfrak{T}_0^i)_{i \in N}$ di spazi vettoriali sui reali e si ponga

$$\mathfrak{T}^+ = \bigoplus_{i \in N} \mathfrak{T}_0^i .$$

Si può definire in $\mathfrak{T}^+$ una legge di composizione interna, detta operazione « parentesi quadra » e denotata con [ ], tale che $\mathfrak{T}^+$ munito della struttura definita dalla suddetta legge di composizione e di quella di spazio vettoriale sui reali risulti un'algebra di Lie.

A tal fine se $K = \sum_{i \in N} K^i$ ed $L = \sum_{i \in N} L^i$ sono due elementi di $\mathfrak{T}^+$, si ponga

$$[K, L] = \sum_{(i,j) \in N^2} [K^i, L^j].$$

È ovvio, da quanto precede, che se $K, L, M \in \mathfrak{T}^+$ ed $\alpha \in R$ si ha

$$[K + L, M] = [K, M] + [L, M];$$

$$[K, L + M] = [K, L] + [K, M];$$

$$[\alpha K, L] = [K, \alpha L] = \alpha [K, L];$$

$$[K, L] = -[L, K]$$

e da quest'ultima

$$[K, K] = 0.$$

Si osservi inoltre che

$$[[K, L], M] + [[L, M], K] + [[M, K], L] =$$
$$= \sum_{(i,j,l) \in N^3} ([[K^i, L^j], M^l] + [[L^j, M^l], K^i] + [[M^l, K^i], L^j]),$$

sicché per le (2.10), (2.13) e (2.14)

$$[[K, L], M] + [[L, M], K] + [[M, K], L] = 0$$

e resta provato che $\mathfrak{T}^+$ è un'algebra di Lie.

Si consideri ora la famiglia $(\overline{\mathfrak{T}}^i)_{i \in N}$ di spazi vettoriali sui reali, essendo $\overline{\mathfrak{T}}^i = S(\mathfrak{T}^i_0)$ $(i \in N^*)$, mentre $\overline{\mathfrak{T}}^0 = \mathfrak{F}$ e si ponga

$$\overline{\mathfrak{T}} = \bigoplus_{i \in N} \overline{\mathfrak{T}}^i.$$

È ovvio che $\overline{\mathfrak{T}}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{T}^+$ e poiché per ogni $(X, Y) \in \mathfrak{T}^r_0 \times \mathfrak{T}^s_0$ $((r, s) \in N^2)$ $[X, Y]$ è un campo tensoriale simmetrico o una funzione differenziabile su V, si conclude che $\overline{\mathfrak{T}}$ è un ideale e quindi una sott'algebra di Lie dell'algebra $\mathfrak{T}^+$.

BIBLIOGRAFIA.

S. KOBAYASHI e K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers 1963.