
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

E. BOMPIANI

**Sulla geometria delle equazioni a derivate parziali di
Monge-Ampère**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.4, p. 369–372.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_369_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Sulla geometria delle equazioni a derivate parziali di Monge-Ampère.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

SUMMARY. — A new exposition of some results obtained by A. TERRACINI on the geometric interpretation of partial differential equations of Monge-Ampère type.

1. — INTRODUZIONE.

In alcuni lavori pubblicati circa un quarto di secolo fa A. Terracini si è occupato della rappresentazione geometrica delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine (e delle loro caratteristiche) in due o più variabili indipendenti; e nel caso di due variabili anche delle equazioni a derivate parziali del 2° ordine e in particolare di quelle del tipo di Monge-Ampère (1).

Ho l'impressione che questi lavori, e per il periodo in cui furono pubblicati (durante la seconda guerra mondiale) e per la scarsa diffusione di periodici che li accolsero, siano rimasti largamente ignorati.

Riprendo in questa Nota le considerazioni del Terracini sulle equazioni di Monge-Ampère per richiamare su di esse l'attenzione; il mio contributo si limita a qualche semplificazione espositiva.

2. — RAPPRESENTAZIONE DELLE CALOTTE SUPERFICIALI (2) DEL 1° e del 2° ORDINE IN UN ORDINARIO SPAZIO PROIETTIVO.

Un elemento superficiale del 1° ordine, o calotta σ_2^1 può pensarsi come l'insieme di punto e piano appartenentisi o come il fascio di rette così determinato. Il Terracini si attiene a questa interpretazione e, riferendosi ad un

(*) Nella seduta del 19 aprile 1969.

(1) A. TERRACINI: 1) *Sur l'interprétation géométrique des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, «Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège», 1939, n.5, pp. 291-303; oppure SELECTA, Edizioni Cremonese 1968 Roma, vol. I, pp. 367-379;

2) *Tangentes a la curva de contacto de una superficie dada y de una superficie regalada con dos directrices rectilíneas*, Revista de La Union Matematica Argentina, vol. IX, p. 1-24, Buenos Aires 1943.

3) *Sobre las ecuaciones diferenciales de Monge-Ampère*, Publicaciones del Instituto de Matematica de la Universidad Nacional del Litoral, Rosario, vol. V, 1943 (di 26 pagine);

4) *Nuevos puntos de vista geometricos vinculados con los elementos superficiales y las ecuaciones en derivadas parciales de 2° orden*, Revista de Matematicas y Fisica Teorica, Universidad Nacional de Tucuman, vol. IV, 1944, pp. 259-316.

5) *Las variedades de Grassmann y las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en el caso de mas variables independientes*, ibidem, pp. 363-376.

(2) La relazione di contatto di ordine r fra varietà di dimensione m (di classe almeno $\mathcal{C}^r$) in un loro punto comune è una relazione d'equivalenza. Questa relazione determina nell'insieme delle varietà di quella dimensione per il punto un insieme quoziente: un elemento di questo insieme è un *elemento differenziale* di dimensione m e di ordine r (con *centro* nel punto) che se $m = 1$ s'indicherà con E_r e se $m > 1$ si dirà calotta σ_m^r .

Per le calotte σ_2^1 e σ_2^2 il Terracini usa i simboli E_1 , E_2 .

ambiente S_3 , le cui rette si rappresentano in punti della quadrica di Klein, K_4^2 , di uno S_5 , rappresenta la σ_2^1 su una retta g di K_4^2 .

Se, in un sistema di coordinate proiettive non-omogenee, la σ_2^1 ha centro O ($x = y = z = 0$) e piano $z = 0$, la retta rappresentativa g ha equazioni (in coordinate assiali per le rette di S_3):

$$g: \quad p_{12} = p_{14} = p_{24} = p_{34} = 0$$

i piani di K_4^2 per essa sono

$$p_{12} = p_{14} = p_{24} = 0 \quad , \quad p_{34} = p_{14} = p_{24} = 0$$

e lo S_3 polare di g che li contiene ha equazioni

$$p_{14} = p_{24} = 0.$$

Esaminiamo ora l'insieme ∞^3 delle calotte superficiali del 2°-ordine passanti per una σ_2^1 assegnata; come tale possiamo prendere quella ora considerata e una $\sigma_2^2 \supset \sigma_2^1$ sia rappresentata da:

$$\sigma_2^2: \quad z = vx^2 + 2sxy + ty^2 + [3]$$

ove l'indeterminazione [3] indica termini arbitrari d'ordine > 2 .

Prendiamo su σ_2^1 un punto $\bar{O}$ ($a_1\varepsilon, a_2\varepsilon, 0, 1$) con ε infinitesimo; il piano ivi tangente a σ_2^2 è

$$z = \varepsilon(a_1r + a_2s)r + \varepsilon(a_1s + a_2t)y$$

Una tangente per $\bar{O}$ in questo piano è determinata inoltre da

$$h(x - \varepsilon a_1) + k(y - \varepsilon a_2) = 0;$$

le coordinate assiali $\bar{p}_{ik}$ di questa tangente, estratte dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(a_1r + a_2s) & \varepsilon(a_1s + a_2t) & -1 & 0 \\ h & k & 0 & -\varepsilon(ha_1 + ka_2) \end{pmatrix},$$

sono

$$\bar{p}_{13} = h \quad , \quad \bar{p}_{23} = k \quad , \quad \bar{p}_{14} = \bar{p}_{24} = 0$$

$$\bar{p}_{12} = \varepsilon\{k(a_1r + a_2s) - h(a_1s + a_2t)\} \quad ; \quad \bar{p}_{34} = \varepsilon(ha_1 + ka_2).$$

L'eliminazione di h e k dà le equazioni della retta $\bar{g}$ (di K_4^2) rappresentante la σ_2^1 di centro $\bar{O}$ appartenente a σ_2^2 :

$$\begin{aligned} \bar{g}: \quad \bar{p}_{12} &= \varepsilon\{\bar{p}_{23}(a_1r + a_2s) - \bar{p}_{13}(a_1s + a_2t)\} \\ \bar{p}_{34} &= \varepsilon\{\bar{p}_{13}a_1 + \bar{p}_{23}a_2\} \quad , \quad \bar{p}_{14} = \bar{p}_{24} = 0. \end{aligned}$$

Tutte queste rette $\bar{g}$, al variare di $a_1 : a_2$ stanno nello S_3 polare di g : è questo insieme di rette, intorno del 1° ordine di g di una qualsiasi congruenza (in K_4^2) che lo contenga, che rappresenta σ_2^2 .

Le rette g e $\bar{g}$ sono incidenti se e solo se $p_{1(2)}\bar{p}_{34} + \bar{p}_{1(2)}p_{34} = 0$ cioè se

$$\begin{vmatrix} ra_1 + sa_2 & -(sa_1 + ta_2) \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = 0$$

o

$$ra_1^2 + 2sa_1a_2 + ta_2^2 = 0$$

cioè lo spostamento $O\bar{O}$ è fatto su una tangente asintotica.

Indicati con m_1, m_2 i valori di a_2/a_1 sulle tangenti asintotiche si ha

$$\begin{cases} r + m_1s = \rho m_1 \\ s + m_1t = -\rho \end{cases} \quad \begin{cases} r + m_2s = -\rho m_2 \\ s + m_2t = \rho \end{cases}$$

e $\rho^2 = s^2 - rt$, da cui per $m_1 \neq m_2$ cioè $\rho \neq 0$

$$r = \frac{2m_1m_2}{m_2 - m_1} \rho, \quad s = -\frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} \rho, \quad t = \frac{2}{m_2 - m_1} \rho.$$

I fuochi di g (intersezioni con le $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ relative a m_1, m_2) sono:

$$F_i: \quad p_{12} = p_{14} = p_{24} = p_{34} = 0, \quad p_{13} = m_i, \quad p_{23} = 1, \quad i = 1, 2$$

e i piani focali (cioè $g\bar{g}_1$ e $g\bar{g}_2$) sono

$$\vartheta_i: \quad p_{12} = \pm \rho p_{34}, \quad p_{14} = p_{24} = 0$$

che appartengono allo S_3 polare di g e dividono armonicamente i piani di K_4^2 passanti per g . Riassumendo:

Fissata una σ_2^1 , cioè una retta g su K_4^2 , una $\sigma_2^2 \supset \sigma_2^1$ è rappresentata associando a due punti F_1, F_2 di g due piani ϑ_1, ϑ_2 separati armonicamente dai piani di K_4^2 per g .

Se si scambia l'ordine di associazione (cioè se si associa F_1 con ϑ_2 e F_2 con ϑ_1) si passa dalla calotta primitiva a quella che ha con essa contatto armonico (e le stesse tangenti asintotiche).

3. - EQUAZIONI DI MONGE-AMPÈRE.

Sia data un'equazione di Monge-Ampère

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

in cui $H, \dots, N$ sono funzioni di x, y, z, p, q , cioè di una σ_2^1 . Per studiare l'insieme delle $\sigma_2^2 \supset \sigma_2^1$ assegnata assumiamo questa come $x = y = z = p = q = 0$ e indichiamo con le stesse lettere $H, \dots, N$ i valori assunti da quelle funzioni su σ_2^1 .

Utilizzando le espressioni di r, s, t in funzione di m_1, m_2, ρ (n. 2) l'equazione precedente si scrive

$$2Hm_1m_2 - 2K(m_1 + m_2) + 2L + \left(\frac{M}{\rho} - N\rho\right)(m_2 - m_1) = 0.$$

Questa equazione non cambia scambiando m_1 con m_2 e ρ con $-\rho$: come deve essere per il significato geometrico già rilevato di questi scambi.

Per ogni valore di ρ la precedente individua una proiettività su g (immagine di σ_2^1): cioè fissato un piano, sia ϑ_1 , per g entro lo S_3 polare e associatolo ad un punto F_1 di g , al punto F_2 corrispondente ad F_1 nella proiettività viene associato il piano ϑ_2 coniugato armonico di ϑ_1 rispetto alla coppia di piani di K_4^2 per g . La figura g, F_1, F_2, ϑ_1 (e ϑ_2) rappresenta, insieme con la proiettività determinata su g da ϑ_1 , una $\sigma_2^2 \supset \sigma_2^1$ soddisfacente all'equazione data.

Fanno eccezione alla conclusione due casi.

Se $H = K = L = O$, cioè per l'equazione $M + N(rt - s^2) = 0$ con $M \neq 0$, sono determinati due piani per g da $M = \rho^2 N$ e sparisce la proiettività, sicché i due piani sono fissi e F_1, F_2 possono scegliersi ad arbitrio.

Se invece $M = N = 0$ cioè per l'equazione

$$Hr + 2Ks + Lt = 0$$

si ha su g un'involuzione che non dipende più da un piano per g ; ogni coppia F_1, F_2 dell'involuzione rappresenta due σ_2^2 a contatto armonico per la σ_2^1 data (il piano, come g , è determinato da σ_2^1). Concludendo:

Fissata una calotta σ_2^1 (rappresentata su K_4^2 da una sua retta g) le $\sigma_2^2 \supset \sigma_2^1$ e soddisfacenti all'equazione data di Monge-Ampère si rappresentano nel modo seguente.

Nel caso generale un piano per g nel suo S_3 polare determina su g una proiettività; una coppia ordinata di punti F_1, F_2 in essa corrispondenti associata ordinatamente al piano dato e a quello coniugato armonico di esso rispetto ai due piani di K_4^2 per g rappresenta una delle σ_2^2 volute; e si ottengono tutte (∞^2) variando il piano e la coppia di punti corrispondenti nella proiettività.

Se però $H = K = L = O$, il piano per g è fisso e i due punti F_1, F_2 su g sono arbitrari (purché distinti, $M \neq 0$).

Se invece $M = N = O$ la proiettività su g è una involuzione; la corrispondenza fra questa involuzione e quella già nominata dei piani per g è arbitraria.

4. - ALTRA INTERPRETAZIONE.

In altri lavori ⁽³⁾ mi ero già occupato di calotte σ_2^2 aventi in comune la calotta σ_2^1 . In essi una σ_2^2 si rappresenta in un punto di uno S_3 proiettivo in cui è specificato un piano ω (i cui punti rappresentano calotte con punto conico nel centro di σ_2^1) e un cono Γ , il cui vertice non appartiene ad ω e rappresenta la calotta inflessionale ($r = s = t = 0$) appartenente al piano di σ_2^1 , mentre gli altri suoi punti rappresentano calotte paraboliche.

In questa rappresentazione una calotta σ_2^2 , con σ_2^1 assegnata, soddisfacente ad un'equazione di Monge-Ampère, è un punto appartenente ad una quadrica del fascio definito da Γ e da una quadrica spezzata in ω e in un piano (che dipende dall'equazione data e da σ_2^1).

(3) E. BOMPIANI, *Invarianti proiettivi di calotte*, « Rend. Acc. d'Italia », s. VII, vol. II, 1941, pp. 888-895;

Invarianti proiettivi e topologici di calotte di superficie e di ipersuperficie tangenti in un punto, « Rend. di matem. e delle sue applic. », s. V., vol. II, 1941, pp. 261-291.