Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Umberto Bartocci

Un procedimento di estensione dei piani grafici infiniti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.4, p. 358–366.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_358_0>

Geometria. — *Un procedimento di estensione dei piani grafici infiniti*. Nota di UMBERTO BARTOCCI [(*)], presentata [(**)] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Non trivial extensions of an infinite graphic plane are constructed and some properties of such extensions are obtained.

1. INTRODUZIONE.

Scopo di questo lavoro è di fornire un generale procedimento di costruzione di estensioni di un piano grafico infinito π diverse dalle ben note estensioni libere. Esse risultano strettamente legate al piano, sì che se ne possono studiare le proprietà grafiche in funzione di quelle di π. Ad esempio, nel § 4 di questa Nota, si determinano alcune proprietà che, oltre ad essere interessanti in sè, permettono di determinare il tipo di Lenz–Barlotti delle estensioni qui introdotte, come verrà mostrato in una successiva pubblicazione.

2. PREMESSE E RICHIAMI.

Un insieme π di elementi, da dirsi « punti » (e che indicheremo con lettere latine maiuscole $P, Q, R, \cdots$), assieme a talune delle sue parti, da dirsi « rette », si denomina un *piano* se (cfr. B. Segre [4] [(1)]):

(i) per due punti distinti qualsiansi passa una ed una sola retta,
(ii) due rette qualsiansi hanno a comune almeno un punto,
(iii) esistono (almeno) 4 punti a 3 a 3 non allineati.

Un piano π si dice *infinito* se contiene infiniti elementi; ogni retta contiene allora infiniti punti e due qualsiansi rette hanno (come insiemi di punti) lo stesso numero cardinale. Tale numero coincide con il cardinale di π, che indicheremo con $|\pi|$.

È evidente che ad un piano π resta univocamente associata una relazione ternaria

$$\Delta \subset \pi \times \pi \times \pi$$

così definita

$$2.1 \qquad (P, Q, R) \in \Delta \Longleftrightarrow P \neq Q \quad , \quad R \in PQ$$

(il simbolo PQ denotando la retta che congiunge i punti P, Q).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1969.

(1) I numeri tra [] si riferiscono alla bibliografia posta alla fine del lavoro.

Viceversa è facile provare che, se π è un insieme nel quale è definita una relazione ternaria Δ, essa è individuata nel modo anzidetto da una struttura di piano in π se, e soltanto se, valgono i seguenti assiomi:

(*a*) $(P, Q, R) \in \Delta \Rightarrow P \neq Q$

(*b*) $\forall P, Q \quad , \quad P \neq Q \quad , \quad \exists R \neq P, Q \quad : \quad (P, Q, R) \in \Delta$

(*c*) $\exists P, Q, R \quad , \quad P \neq Q \quad : \quad (P, Q, R) \notin \Delta$

(*d*) $\forall P, Q \quad , \quad P \neq Q \quad , \quad (P, Q, P) \in \Delta \quad , \quad (P, Q, Q) \in \Delta$

(*e*) $(P, Q, X) \in \Delta \quad , \quad (P, Q, Y) \in \Delta ,$
$X \neq Y \Rightarrow \forall Z \qquad (P, Q, Z) \in \Delta \Longleftrightarrow (X, Y, Z) \in \Delta$

(*f*) $\forall P, Q, R, S \ , \ P \neq Q, R \neq S \ , \ \exists X \ : \ (P, Q, X) \in \Delta \ , \ (R, S, X) \in \Delta.$

È chiaro infatti che, assegnati π e Δ soddisfacenti agli assiomi precedenti, π diventa un piano grafico qualora si definisca la retta PQ congiungente due punti distinti $P, Q \in \pi$ tramite la

$$PQ = \{X \in \pi : (P, Q, X) \in \Delta\}$$

(e questa è l'unica struttura di piano in π che a sua volta individui Δ).

Richiamiamo ora alcune nozioni sulla teoria dei filtri (cfr. N. Bourbaki [1], S. Kochen [3]).

Indicato con A un insieme non vuoto qualunque, un sottoinsieme $\mathfrak{F}$ dell'insieme delle parti di A ($\mathfrak{F} \subseteq P(A)$) si dice un *filtro* (su A) se soddisfa le seguenti proprietà:

2.2 $\qquad \mathfrak{F} \ni X \quad , \quad \mathfrak{F} \ni Y \quad \Rightarrow \mathfrak{F} \ni X \cap Y$

2.3 $\qquad X \subseteq Y \quad , \quad \mathfrak{F} \ni X \quad \Rightarrow \mathfrak{F} \ni Y$

2.4 $\qquad \mathfrak{F} \not\ni \varnothing .$

Un filtro dicesi poi un *ultrafiltro* se è massimale nella famiglia dei filtri (ordinata per inclusione). Si prova subito che:

2.5 *Un filtro* $\mathfrak{F}$ *è un ultrafiltro se e solo se*, $\forall X \in P(A)$, *si verifica una delle due eventualità* (*e quindi una sola*)

$$\mathfrak{F} \ni X \quad , \quad \mathfrak{F} \ni A - X.$$

Dalla 2.5 segue che:

2.6 $\qquad \mathfrak{F} \ni X_1 \cup \cdots \cup X_n \quad , \quad X_i \cap X_j = \varnothing \qquad i \neq j \Rightarrow \exists i \quad : \quad \mathfrak{F} \ni X_i .$

Un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ si dice *principale* se consta di tutti e soli i sottoinsiemi $X \subseteq A$ che contengono un fissato elemento $\alpha \in A$ (un insieme $\mathfrak{F}$ così definito risulta manifestamente un ultrafiltro su A, e lo si dice *generato* da α).

Si prova che:

2.7 *Se l'insieme* A *è finito, ogni suo ultrafiltro è principale*; *invece, se* A *è infinito, esistono ultrafiltri non principali su* A.

Se $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una famiglia di insiemi ed $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro su A, si dice *ultraprodotto* della famiglia (secondo $\mathfrak{F}$), e lo si denota con $\prod_{\alpha\in A} I_\alpha/\mathfrak{F}$, l'insieme quoziente del prodotto cartesiano $\prod_{\alpha\in A} I_\alpha$ rispetto alla relazione di equivalenza:

$$f, g \in \prod_{\alpha\in A} I_\alpha \quad , \quad f \sim g \bmod \mathfrak{F} \Longleftrightarrow \mathcal{A}_{f,g} = \{\alpha \in A : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathfrak{F} .$$

Indicheremo con $\bar{f}$ il trasformato di $f \in \prod_{\alpha\in A} I_\alpha$ nella proiezione canonica $\prod_{\alpha\in A} I_\alpha \xrightarrow{p} \prod_{\alpha\in A} I_\alpha/\mathfrak{F}$ che associa ad f la propria classe di equivalenza.

Se $\mathfrak{F}$ non è principale, si parla di $\prod_{\alpha\in A} I_\alpha/\mathfrak{F}$ come di un ultraprodotto *proprio*; se $\mathfrak{F}$ è invece principale e generato da $\beta \in A$, si prova subito che esiste una corrispondenza biunivoca (canonica) tra I_β e $\prod_{\alpha\in A} I_\alpha/\mathfrak{F}$.

Se $I_\alpha = I$ per $\forall\alpha \in A$, si parla di $\prod_{\alpha\in A} I_\alpha/\mathfrak{F} = I^A/\mathfrak{F}$ come di un'*ultrapotenza* di I (*propria* se $\mathfrak{F}$ non è principale).

Considerata un'ultrapotenza $I^A/\mathfrak{F}$ di I, esiste sempre un'*iniezione canonica* $I \xrightarrow{i} I^A/\mathfrak{F}$; essa si ottiene componendo l'immersione diagonale

$$\delta : I \longrightarrow I^A \qquad (x \in I \,,\, \delta(x) \in I^A : \delta(x)(\alpha) = x \qquad \forall\alpha \in A)$$

e la proiezione canonica $I^A \xrightarrow{p} I^A/\mathfrak{F}$

$$\begin{array}{c} I \xrightarrow{\delta} I^A \xrightarrow{p} I^A/\mathfrak{F} . \\ \underbrace{\hspace{8em}}_{i = p\delta} \end{array}$$

3. COSTRUZIONE DI ESTENSIONI DI UN PIANO INFINITO.

Indicato con π un piano infinito e con Δ la relazione ternaria ad esso associata (§ 1), ci proponiamo di costruire un insieme π^* con una relazione ternaria Δ^*, soddisfacente agli assiomi $(a), \cdots, (f)$, tali che esista un'iniezione

$$\pi \xrightarrow{i} \pi^*$$

per la quale valgano le seguenti proprietà:

3.1 $\qquad i(\pi) \subset \pi^*$,

3.2 $\qquad (P, Q, R) \in \Delta \Longleftrightarrow (i(P), i(Q), i(R)) \in \Delta^*$.

Diremo allora che il piano π^* è un'*estensione* (propria) del piano π.

Indichiamo con A un insieme infinito qualunque, avente cardinale $|A| \leq |\pi|$ (su questa ipotesi ritorneremo alla fine del presente paragrafo), e con $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro non principale su A.

Costruita l'ultrapotenza $\pi^* = \pi^A/\mathfrak{F}$, si definisca una relazione ternaria Δ^* in π^* nel modo seguente (al solito, con f, g, h indichiamo elementi arbitrari di π^A e con $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ le rispettive classi di equivalenza in π^*):

$$(\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}) \in \Delta^* \Longleftrightarrow \mathfrak{A}_{f,g,h} = \{\alpha \in A : (f(\alpha), g(\alpha), h(\alpha)) \in \Delta\} \in \mathfrak{F}.$$

Mostreremo anzitutto che la definizione di Δ^* non dipende dalla scelta dei rappresentanti. Sia infatti $\bar{f} = \bar{f}_1$, $\bar{g} = \bar{g}_1$, $\bar{h} = \bar{h}_1$. Allora

$$\exists A_1 \in \mathfrak{F} \quad : \quad \forall \alpha \in A_1 \qquad f(\alpha) = f_1(\alpha),$$

$$\exists A_2 \in \mathfrak{F} \quad : \quad \forall \alpha \in A_2 \qquad g(\alpha) = g_1(\alpha),$$

$$\exists A_3 \in \mathfrak{F} \quad : \quad \forall \alpha \in A_3 \qquad h(\alpha) = h_1(\alpha)$$

e risulta quindi

$$\forall \alpha \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \mathfrak{A}_{f,g,h} \in \mathfrak{F} \qquad (f_1(\alpha), g_1(\alpha), h_1(\alpha)) \in \Delta$$

di guisa che

$$\mathfrak{A}_{f_1,g_1,h_1} \supseteq A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \mathfrak{A}_{f,g,h} \in \mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{A}_{f_1,g_1,h_1} \in \mathfrak{F}.$$

Proviamo ora che:

3.3 Δ^* *soddisfa agli assiomi* $(a), \cdots, (f)$.

Dim. (a): $(\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}) \in \Delta^* \Rightarrow \mathfrak{A}_{f,g,h} \in \mathfrak{F} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathfrak{A}_{f,g,h} \in \mathfrak{F}$

$$f(\alpha) \neq g(\alpha) \Rightarrow \bar{f} \neq \bar{g}.$$

(b): $\forall \bar{f}, \bar{g}, \bar{f} \neq \bar{g}$, definiamo h in modo che $(\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}) \in \Delta^*$, $\bar{h} \neq \bar{f}, \bar{g}$;

poiché

$$\bar{f} \neq \bar{g} \Rightarrow \exists A_1 \in \mathfrak{F} \quad : \quad \forall \alpha \in A_1 \qquad f(\alpha) \neq g(\alpha),$$

si ha che

$$\forall \alpha \in A_1 \quad \exists P_\alpha \in \pi \quad : \quad (f(\alpha), g(\alpha), P_\alpha) \in \Delta \quad , \quad P_\alpha \neq f(\alpha), g(\alpha).$$

Basta allora porre

$$h(\alpha) = P_\alpha \quad \forall \alpha \in A_1 \quad , \quad h(\alpha) = X \quad \forall \alpha \in A - A_1,$$

ove X indichi un punto arbitrario di π, per avere il risultato.

(c) Poiché $\exists P, Q, R \in \pi$, $P \neq Q$, tali che $(P, Q, R) \notin \Delta$, si definiscano f, g, h nel seguente modo:

$$f(\alpha) = P \quad \forall \alpha \in A \quad , \quad g(\alpha) = Q \quad \forall \alpha \in A \quad , \quad h(\alpha) = R \quad \forall \alpha \in A.$$

È chiaro che $\bar{f} \neq \bar{g}$, $(\bar{f}, \bar{g}, h) \notin \Delta^*$.

(d) Dati $\bar{f}$ e $\bar{g}$, $\bar{f} \neq \bar{g}$, $\exists A_1 \in \mathfrak{F}$: $f(\alpha) \neq g(a) \quad \forall \alpha \in A_1$.

Allora

$$(f(\alpha), g(\alpha), f(\alpha)) \in \Delta \quad \forall \alpha \in A_1 \quad , \quad (f(\alpha), g(\alpha), g(\alpha)) \in \Delta \quad \forall \alpha \in A_1,$$

eppertanto

$$(\bar{f}, \bar{g}, \bar{f}) \in \Delta^* \quad ; \quad (\bar{f}, \bar{g}, \bar{g}) \in \Delta^*$$

poiché

$$\mathcal{A}_{f,g,f} \supseteq A_1 \quad , \quad \mathcal{A}_{f,g,g} \supseteq A_1 \quad , \quad A_1 \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \ni \mathcal{A}_{f,g,f} \quad , \quad \mathcal{A}_{f,g,g}.$$

$$(e) \quad (\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}) \in \Delta^* \ , \quad (\bar{f}, \bar{g}, \bar{k}) \in \Delta^* \ , \quad \bar{h} \neq \bar{k} \Rightarrow \mathcal{A}_{f,g,h} \in \mathcal{F} \quad , \quad \mathcal{A}_{f,g,k} \in \mathcal{F},$$

$$\exists A_1 \in \mathcal{F} \quad : \quad h(\alpha) \neq k(\alpha) \quad \forall \alpha \in A_1.$$

Si ha dunque:

$$\forall \alpha \in A_2 = A_1 \cap \mathcal{A}_{f,g,h} \cap \mathcal{A}_{f,g,k} \in \mathcal{F}$$

$$(f(\alpha), g(\alpha), h(\alpha)) \in \Delta \quad , \quad (f(\alpha), g(\alpha), k(\alpha)) \in \Delta \quad , \quad h(\alpha) \neq k(\alpha)$$

di guisa che, $\forall Z_\alpha \in \pi$, $\forall \alpha \in A_2$

$$(f(\alpha), g(\alpha), Z_\alpha) \in \Delta \Longleftrightarrow (h(\alpha), k(\alpha), Z_\alpha) \in \Delta$$

epperò la conclusione.

$$(f) \quad \bar{f} \neq \bar{g} \quad , \quad \bar{h} \neq \bar{k} \Rightarrow \exists A_1 \in \mathcal{F} \quad : \quad \forall \alpha \in A_1 \quad f(\alpha) \neq g(\alpha),$$

$$\exists A_2 \in \mathcal{F} \quad : \quad h(\alpha) \neq k(\alpha) \quad \forall \alpha \in A_2.$$

Quindi

$$\forall \alpha \in A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F} \quad \exists X_\alpha \in \pi \quad : \quad (f(\alpha), g(\alpha), X_\alpha) \in \Delta \quad , \quad (h(\alpha), k(\alpha), X_\alpha) \in \Delta$$

e basta definire $l \in \pi^A$ con le

$$l(\alpha) = X_\alpha \quad \forall \alpha \in A_1 \cap A_2 \quad , \quad l(\alpha) = X \quad \forall \alpha \in A - A_1 \cap A_2$$

con X arbitrario in π, per avere un $\bar{l}$ tale che $(\bar{f}, \bar{g}, \bar{l}) \in \Delta^*$, $(\bar{h}, \bar{k}, \bar{l}) \in \Delta^*$.

Indicata con i l'iniezione canonica di π in π^* di cui alla fine del § 2, proviamo che:

3.4 *i soddisfa agli assiomi* 3.1, 3.2.

Dim. Per provare la 3.1 si osservi che, essendo $|A| \leq |\pi|$, esiste un'iniezione $f : A \rightarrowtail \pi$; è evidente che $\bar{f} \in \pi^* - i(\pi)$ (infatti $\mathcal{F}$, non essendo principale, non contiene insiemi finiti per la 2.6), cioè, come volevasi,

$$\pi^* \supset i(\pi).$$

Per quanto concerne la 3.2, è chiaro che

$$(P, Q, R) \in \Delta \Rightarrow (i(P), i(Q), i(R)) \in \Delta^*,$$

poiché $\mathcal{A}_{\delta(\mathrm{P}),\delta(\mathrm{Q}),\delta(\mathrm{R})} = \mathrm{A}$ ($\overline{\delta(\mathrm{P})} = i(\mathrm{P})$, etc.); infatti $\forall\alpha\in\mathrm{A}$ $\delta(\mathrm{P})(\alpha) = \mathrm{P}$ etc. Viceversa

$$(i(\mathrm{P}), i(\mathrm{Q}), i(\mathrm{R})) \in \Delta^* \Rightarrow \exists \mathrm{A}_1 \in \mathfrak{F} \quad : \quad \forall\alpha\in\mathrm{A}_1$$
$$(\delta(\mathrm{P})(\alpha), \delta(\mathrm{Q})(\alpha), \delta(\mathrm{R})(\alpha)) \in \Delta \Rightarrow (\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \Delta.$$

Un'estensione di π del tipo indicato verrà detta un'*ultrapotenza* (propria).

Vediamo ora cosa accade del precedente procedimento di estensione nel caso che A sia un insieme infinito qualunque e π sia un piano finito. In questo caso si ha che:

3.5 *L'iniezione canonica* $\pi \xrightarrow{i} \pi^*$ *è surjettiva.*

Dim. Siano $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_\varrho$ gli elementi di π. Assegnato $\overline{f}$ qualunque in π^*, poniamo

$$\mathrm{B}_j = \{\alpha\in\mathrm{A} : f(\alpha) = \mathrm{P}_j\}, \qquad j = 1, 2, \cdots, \varrho.$$

A risulta unione disgiunta degli insiemi $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \cdots, \mathrm{B}_\varrho$, di guisa che per 2.6 $\exists k : \mathrm{B}_k \in \mathfrak{F}$. Ovviamente dunque $\overline{f} = i(\mathrm{P}_k)$.

Nel caso finito non si ha così un'estensione del piano, poiché $\pi^* = i(\pi)$.

Torniamo di nuovo al caso infinito, e vediamo cosa accade quando $|\mathrm{A}| > |\pi|$.

Se $\mathfrak{F}$ è un ultrafiltro non principale su A, si può di nuovo considerare il piano π^* e l'iniezione $\pi \xrightarrow{i} \pi^*$ soddisfa ancora l'assioma 3.2. Appare invece ora difficile provare che vale la 3.1, cioè che i non è una sovraiezione.

Usando però convenienti ultrafiltri, è agevole provare che anche in questo caso si ottengono estensioni (proprie) di π, addirittura di potenza via via crescente. Più precisamente:

3.6 *Se* B *è un insieme infinito qualunque, esistono sempre ultrafiltri non principali* $\mathfrak{F}$ *in* π^{B} *tali che* $|\pi^{(\pi^{\mathrm{B}})}/\mathfrak{F}| \geq |\mathrm{B}|$.

Dim. Si consideri la corrispondenza $\iota : \mathrm{B} \to \pi^{(\pi^{\mathrm{B}})}$ così definita:

$$b\in\mathrm{B}, f\in\pi^{\mathrm{B}} \quad , \quad \iota(b)(f) = f(b).$$

È chiaro che essa risulta iniettiva, poiché

$$b \neq b' \Rightarrow \exists f\in\pi^{\mathrm{B}} \quad : \quad f(b) \neq f(b') \Rightarrow \iota(b)(f) = f(b) \neq \iota(b')(f) =$$
$$= f(b') \Rightarrow \iota(b) \neq \iota(b').$$

Proveremo ora che esiste in π^{B} un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ non principale tale che la corrispondenza $\varkappa$ così definita

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend right, "\varkappa = p\iota"'] & \pi^{(\pi^{\mathrm{B}})} \arrow[r, two heads, "p"] & \pi^{(\pi^{\mathrm{B}})}/\mathfrak{F} \end{tikzcd}$$

è anch'essa iniettiva.

$\varkappa$ risulta iniettiva se e solo se

$$b \neq b' \Rightarrow \varkappa(b) = p\iota(b) \neq \varkappa(b') = p\iota(b') \Rightarrow \mathfrak{F} \not\ni \{f \in \pi^B : \iota(b)(f) = \iota(b')(f)\} = \mathfrak{A}_{bb'}$$

(l'insieme $\mathfrak{A}_{bb'}$ è quindi l'insieme delle funzioni $B \xrightarrow{f} \pi$ tali che $f(b) = f(b')$).

Risulta quindi necessario e sufficiente, affinché $\varkappa$ sia un'iniezione, che $\mathfrak{F}$ contenga tutti gli insiemi $T_{x,y}$ così definiti:

$$\forall x, y \in B \quad , \quad x \neq y \qquad T_{x,y} = \{f \in \pi^B : f(x) \neq f(y)\}.$$

Tali ultrafiltri non principali esistono certamente, poiché la famiglia $\{T_{x,y}\}$ soddisfa alla proprietà delle intersezioni finite (come è immediato provare, poiché π è infinito) e genera quindi un filtro (minimo filtro che la contiene) che è sempre contenuto in qualche ultrafiltro non principale (in quanto $\bigcap_{x,y} T_{x,y} = \{$totalità delle corrispondenze iniettive da B a $\pi\}$ è un insieme vuoto o infinito).

4. Alcune proprietà delle ultrapotenze di un piano.

Indichiamo con $G(\pi)$ e $G(\pi^*)$ i gruppi degli automorfismi di π e π^* rispettivamente; costruito l'insieme $G(\pi)^A/F$, che indicheremo con $G(\pi)^*$, la struttura di gruppo in $G(\pi)$ e quindi in $G(\pi)^A$ induce in modo ovvio una struttura di gruppo in $G(\pi)^*$, tramite l'operazione

$$\overline{\tau} \cdot \overline{\tau}' = \overline{\tau\tau'}$$

(indichiamo con τ, τ' elementi di $G(\pi)^A$ e con $\overline{\tau}$, $\overline{\tau}'$ le rispettive classi di equivalenza modulo $\mathfrak{F}$).

Proviamo che:

4.1 *Esistono due iniezioni canoniche* $G(\pi) \xrightarrow{j} G(\pi)^* \xrightarrow{j'} G(\pi^*)$.

Dim. Si assuma come j l'iniezione canonica di $G(\pi)$ nella sua ultrapotenza $G(\pi)^*$; è immediato dimostrare che j è un omomorfismo di gruppi, sul che però qui non insistiamo.

In conformità con le notazioni dianzi introdotte, si definisca j' nel modo seguente:

$$j'(\overline{\tau}) : \pi^* \to \pi^* \quad , \quad j'(\overline{\tau})(\overline{f}) = \overline{g} \;:\; g(\alpha) = \tau(\alpha)(f(\alpha)).$$

Raggiungeremo il risultato provando successivamente che:

A) j' è ben definita,
B) $j'(\overline{\tau}) \in G(\pi^*)$,
C) j' è una corrispondenza iniettiva,
D) j' è un omomorfismo di gruppi.

A) Proviamo che

$$\overline{\tau} = \overline{\tau}' \quad , \quad \overline{f} = \overline{f}' \Rightarrow j'(\overline{\tau})(\overline{f}) = j'(\overline{\tau}')(\overline{f}').$$

Infatti

$\overline{\tau} = \overline{\tau}'$, $\overline{f} = \overline{f}' \Rightarrow \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}$: $\forall \alpha \in A_1$ $\tau(\alpha) = \tau'(\alpha)$, $\forall \alpha \in A_2$ $f(\alpha) = f'(\alpha)$

e risulta quindi

$$\forall \alpha \in A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F} \qquad \tau(\alpha)(f(\alpha)) = \tau'(\alpha)(f'(\alpha))$$

epperò la conclusione.

B) Cominciamo col provare che

$$(\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}) \in \Delta^* \Rightarrow (j'(\overline{\tau})(\overline{f}), j'(\overline{\tau})(\overline{g}), j'(\overline{\tau})(\overline{h})) \in \Delta^*.$$

Infatti

$$(\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}) \in \Delta^* \Rightarrow \exists A_1 \in \mathcal{F} : \forall \alpha \in A_1 \ (f(\alpha), g(\alpha), h(\alpha)) \in \Delta \Rightarrow \forall \alpha \in A_1 \in \mathcal{F}$$
$$(\tau(\alpha)(f(\alpha)), \tau(\alpha)(g(\alpha)), \tau(\alpha)(h(\alpha))) \in \Delta.$$

$j'(\overline{\tau})$ risulta inoltre biunivoca, come corrispondenza di π^* in sè, perché

$$\overline{f} \neq \overline{g} \Rightarrow \exists A_1 \in \mathcal{F} \ : \ \forall \alpha \in A_1 \ f(\alpha) \neq g(\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in A_1$$
$$\tau(\alpha)(f(\alpha)) \neq \tau(\alpha)(g(\alpha)) \Rightarrow j'(\overline{\tau})(\overline{f}) \neq j'(\overline{\tau})(\overline{g})$$

e poi

$$\forall \overline{g} \in \pi^* \ \ \exists \overline{f} \in \pi^* \ : \ j'(\overline{\tau})(\overline{f}) = \overline{g}$$

(basta definire f tramite la $f(\alpha) = \tau(\alpha)^{-1}(g(\alpha))$).

C) $\overline{\tau} \neq \overline{\tau}' \Rightarrow \exists A_1 \in \mathcal{F} \ : \ \forall \alpha \in A_1 \ \tau(\alpha) \neq \tau'(\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in A_1$

$$\exists P_\alpha \in \pi \ : \ \tau(\alpha)(P_\alpha) \neq \tau'(\alpha)(P_\alpha) \Rightarrow j'(\overline{\tau})(\overline{f}) \neq j'(\overline{\tau}')(\overline{f})$$

essendo f definita tramite la $f(\alpha) = P_\alpha$ $\forall \alpha \in A_1$, $f(\alpha) = X$ $\forall \alpha \in A - A_1$ (X designi al solito un punto arbitrario di π).

D) Risulta $j'(\overline{\tau}\,\overline{\tau}')(\overline{f}) = \overline{(\tau(\alpha)\,\tau'(\alpha)(f(\alpha)))}$ e poi $j'(\overline{\tau})\,j'(\overline{\tau}')(\overline{f}) = j'(\overline{\tau})\,\overline{(\tau'(\alpha)(f(\alpha)))} = \overline{(\tau(\alpha)(\tau'(\alpha)(f(\alpha))))}$ (con (P_α) si indichi l'elemento di π^A di componente α–esima P_α).

Consideriamo ora un'ultrapotenza (propria) π^* di π. Indicata con l una retta di π, i punti di $i(l) \subset \pi^*$ sono allineati su di una retta di π^*, che verrà designata con $\widetilde{i(l)}$.

Vale il seguente teorema:

4.2 *Se* π *è* (P, l)*–transitivo,* π^* *è* $(i(P), \widetilde{i(l)})$*–transitivo.*

Dim. Il lemma 4.1 fornisce subito che, se

$$\overline{f}, \overline{g} \in i(\pi) \ , \ \overline{f} \neq \overline{g} \ , \ \overline{f}, \overline{g} \neq i(P) \ , \ \overline{f}, \overline{g} \notin \widetilde{i(l)} \ , \ (\overline{f}, \overline{g}, i(P)) \in \Delta^*,$$

esiste allora un'omologia di π^* di centro $i(P)$ ed asse $\widetilde{i(l)}$ che porta $\overline{f}$ in $\overline{g}$. Infatti, se $\overline{f} = i(Q)$ e $\overline{g} = i(R)$ (sarà $Q \neq R$, $Q, R \neq P$, $Q, R \notin l$, $(Q, R, P) \in \Delta$) e ω è l'omologia di π di centro P ed asse l che muta Q in R, basta considerare l'automorfismo di π^* uguale a $\widetilde{j' j(\omega)}$; effettivamente $\widetilde{j' j(\omega)}$ muta $\bar{f}$ in $\bar{g}$, fissa tutti i punti di $i(l)$ (poiché $\bar{h} \in i(l) = i(X)\, i(Y) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists A_1 \in \mathfrak{F} : \forall \alpha \in A_1\ (X, Y, h(\alpha)) \in \Delta \Rightarrow \forall \alpha \in A_1\ h(\alpha) \in l \Rightarrow \forall \alpha \in A_1\ \omega(h(\alpha)) =$ $= h(\alpha) \Rightarrow \widetilde{j' j(\omega)}(\bar{h}) = \bar{h}$), ed infine muta in sè tutte le rette di π^* passanti per $i(P)$, dal momento che, se $\bar{h}\,\bar{k} \ni i(P)$, allora risulta $\exists A_1 \in \mathfrak{F} : \forall \alpha \in A_1$ $h(\alpha) \neq k(\alpha)$, $h(\alpha)\, k(\alpha) \ni P \Rightarrow \forall \alpha \in A_1\ \omega(h(\alpha)\, k(\alpha)) = h(\alpha)\, k(\alpha) \Rightarrow \widetilde{j' j(\omega)}(\bar{h}\,\bar{k}) = \bar{h}\,\bar{k}$.

Per provare completamente il teorema, dovremo ancora dimostrare che quanto precedentemente esposto vale anche nel caso che $\bar{f}$ e $\bar{g}$ siano elementi qualunque di π^*, il che si ottiene con ovvie modifiche del procedimento testè usato. Infatti:

$$\exists A_1 \in \mathfrak{F} \ :\ \forall \alpha \in A_1 \quad f(\alpha) \neq g(\alpha) \quad , \quad f(\alpha), g(\alpha) \neq P,$$
$$f(\alpha), g(\alpha) \notin l \quad , \quad (f(\alpha), g(\alpha), P) \in \Delta$$

e quindi per $\forall \alpha \in A_1$ esiste un'omologia ω_α di π di centro P ed asse l che muta $f(\alpha)$ in $g(\alpha)$. Indichiamo con ω l'elemento di $G(\pi)^A$ avente come componente α–esima in A_1 ω_α, ed altrove ad esempio l'identità; $\overline{\omega}$ risulta un'omologia di π^* avente le proprietà richieste, com'è ormai immediato, e ne consegue quindi il risultato.

Questo è di grande interesse per lo studio della configurazione di Lenz–Barlotti relativa a π^*.

BIBLIOGRAFIA.

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. I, 3 ediz. 1961.
[2] P. DEMBOWSKI, *Finite geometries* (Ergebn. d. Math., Bd. 44), Springer, Berlin 1968.
[3] S. KOCHEN, *Ultraproducts in the theory of models*, «Ann. of Math.», (2), 74, 221–261 (1961).
[4] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961.