Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Karl M. van Meter

Sur les demi-groupes de Dedekind

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.4, p. 353–357.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_353_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Algebra. — *Sur les demi-groupes de Dedekind.* Nota di KARL M. VAN METER, presentata [(*)] dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Un semigruppo di Dedekind è notoriamente un semigruppo ordinato avente un elemento unità e quale massimo elemento, tale inoltre che ogni elemento diverso da e e dallo zero (se un elemento o esiste) si decomponga univocamente in un prodotto di un numero finito di elementi massimali (coperti cioè da e) fra loro a due a due permutabili. In questa Nota vengono assegnati due sistemi di condizioni necessarie e sufficienti affinché un gruppoide ordinato risulti un semigruppo di Dedekind.

Le premier théorème est une généralisation du théorème suivant donné par Mme. M-L. Dubreil-Jacotin dans son cours sur les demi-groupes ordonnes [(1)].

THEOREME. – *Un demi-groupe ordonné* D *avec pour plus grand élément l'èlément unité* e, *plus petit élément l'èlément nul* O *et n'ayant pas de diviseur de* O *est un demi-groupe de Dedekind si et seulement si* D *vérifie les conditions*:

(a′) *Si les éléments* a *et* b *ont* e *comme borne supérieure* ($a \vee b = e$), *alors si* $c \neq b$ *est tel que* $ac < b$, *on a* $c < b$.

(b′) D *vérifie la condition maximale.*

(c′) $a < b$ *entraîne qu'il existe un élément* c ($c \neq a$ *si* $b \neq e$) *tel que* $a = bc$.

(d′) *Les éléments maximaux sont d'ordre infini* (*c'est-á-dire pour un élément maximal* m, $m^h = m^k$ *entraîne* $h = k$).

Ce théorème est une généralisation de celui de L. Fuchs et O. Steinfeld [(2)].

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THEOREME 1. *Un groupoïde ordonné* G ($O \leq x \leq e$ *pour tout* $x \in G$) *est un demi-groupe de Dedekind si et seulement s'il vérifie les conditions*:

(a) $a \vee b = e$ *et* $ac < b$ *ou* $ca < b$ *entraînent* $c \leq b$.

(b) G *vérifie la condition maximale.*

(c) $a < b$ *entraîne qu'il existe* $c \in G$ ($c \neq a$ *si* $b \neq e$) *tel que* $a = bc$.

(d) *Pour deux produits finis égaux d'éléments maximaux, le nombre total de facteurs est le même dans les deux produits.*

1.1) Le même raisonnement que dans L. Fuchs montre que *tout* $a \in G$ ($a \neq e$, O) *est un produit fini d'éléments maximaux de* G *de la forme*

$$a = m_1 (m_2 (m_3 (\cdots m_r) \cdots).$$

(*) Nella seduta del 19 aprile 1969.

(1) Voir aussi: Mme. M-L DUBREIL-JACOTIN, « Semigroup Symposium », Smolenice-juin 1968.

(2) L. FUCHS. *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*, Budapest 1966. p. 279.

En effet, si a n'est pas maximal, il existe $c \in \mathrm{G}$ tel que $a < c < e$, et d'après (b) il existe un élément maximal $m_1 \in \mathrm{G}$ tel que $a < m_1 < e$; d'après (c) il existe c_1 tel que $a = m_1 c_1$ avec $a < c_1$ puisque $a \neq c_1$. Si c_1 n'est pas maximal, on continue le processus et on obtient $a = m_1 c_1 = m_1 (m_2 c_2) = m_1 (m_2 (m_3 c_3)) = \cdots$ avec $a < c_1 < c_2 \cdots$ et (b) entraîne qu'il existe un élément maximal m_r tel que

$$a = m_1 (m_2 (m_3 (\cdots m_r) \cdots).$$

1.2) Trivialement (c) entraîne que *tout élément premier* p $(p \neq e, \mathrm{O})$ *est maximal.*

1.3) Comme dans le théorème de Mme. Dubreil–Jacotin, *tout élément maximal est premier*. Soit en effet m un élément maximal et supposons que $ab \leq m$. Si $ab = m$, nous avons $m \leq a$ et $m \leq b$ d'où $m = a = b$ et $m = mm$, ce qui est incompatible avec (d). Donc $ab < m$; si de plus $a \nleq m$, nous avons $a \vee m = e$ et d'après (a) $b \leq m$.

1.4) De plus comme dans le livre de L. Fuchs, *les éléments premiers commutent*. En effet, soient $p_1, p_2 \in \mathrm{G}$ deux éléments premiers distincts. On a en vertu de l'isotonie $p_1 p_2 \leq p_2$. D'après 1.2) p_1 et p_2 sont maximaux, donc $p_1 p_2 = p_2$ contredirait (d), et par suite $p_1 p_2 < p_2$. Donc il existe c tel que $p_1 p_2 = p_2 c \leq p_1$, et de la condition $p_1 \nleq p_2$ résulte, puisque p_1 est premier, que $c \leq p_1$, d'où $p_1 p_2 = p_2 c \leq p_2 p_1$ et de même $p_2 p_1 \leq p_1 p_2$, donc $p_1 p_2 = p_2 p_1$.

Remarque 1.1. – De 1.1), 1.3) et 1.4) il résulte que tout élément $a \in \mathrm{G}$ $(a \neq e, \mathrm{O})$ est un produit fini d'éléments premiers deux à deux permutables de la forme

$$a = q_1 (q_2 (\cdots q_r) \cdots).$$

Remarque 1.2. – Dans toute autre représentation éventuelle de a en produit fini d'éléments premiers (maximaux) $p_1, p_2, \cdots, p_n$, il ne peut figurer d'élément p_j $(j = 1, \cdots, n)$ différent d'un q_i $(i = 1, \cdots, r)$. En effet, supposons que $p_k \neq q_i$ pour tout i. En vertu de l'isotonie $a = q_1 (\cdots q_r) \leq p_k$ et puisque p_k est premier, il existe au moins un q_h $(1 \leq h \leq r)$ tel que $q_h \leq p_k$. Mais q_h est maximal d'où $q_h = p_k$.

1.5) *Pour tout élément premier* $p \in \mathrm{G}$ (*donc maximal*), *tout produit de longueur* n *en* p *est égal à* $p (p (\cdots p) \cdots)$ *où* p *apparaît* n *fois*. On a $p (pp) \leq pp$, et à cause de (d), $p (pp) \neq pp$ d'où $p (pp) < pp$; il existe c tel que $p (pp) = (pp) c$; si $c = e$, on a $p (pp) = pp$, ce qui contredit (d); si $c = 0$, on a $p (pp) = 0$ d'où $[p (pp)] [p (pp)] = p (pp)$, ce qui contredit aussi (d). Donc $c \neq e, \mathrm{O}$ et d'après la Remarque 1.1, $c = q_1 (q_2 (\cdots q_r) \cdots)$. Mais la Remarque 1.2 entraîne que c est un produit fini en p, et compte tenu de (d), il résulte que $c = p$ et $p (pp) = (pp) p$, d'où $p (pp) = (pp) p = p^3$.

Supposons que la propriété soit valable pour tout produit fini en p de longueur inférieure ou égale à n. Soit a un produit quelconque en p de longueur $r = n + 1$. En vertu de l'isotonie on a $a \leq p$, ce qui entraîne $a < p$ à cause de (d). Il existe c tel que $a = pc$ et, d'après les Remarques 1.1 et 1.2, c est un produit fini en p; soit c de longueur k (> 0), la condition (d) exige que $k = r - 1 = n$ d'où $c = p\,(p\,(\cdots p)\cdots)$ où p apparaît n fois (d'après l'hypothèse) et $a = pc = p\,[p\,(p\,(\cdots p)\cdots)] = p\,(p\,(p\,(\cdots p)\cdots)$ où p apparaît r fois. On a le résultat par récurrence et p^n $(n > 0)$ *est défini.*

1.6) *Tout* $a \in G$ $(a \neq e\,, O)$ *est représentable en produit fini de puissances d'éléments premiers, distincts et deux à deux permutables.* D'après la Remarque 1.1, pour tout $a \in G$ $(a \neq e\,, O)$, il existe des éléments premiers (maximaux) $q_1\,,\cdots,q_r$ tels que $a = q_1\,(q_2\,(\cdots q_r)\cdots)$. Soient $p_1\,,\cdots,p_n$ $(O < n \leq r)$ les éléments distincts parmi les $q_1\,,\cdots,q_r$. L'élément a est donc un produit fini en $p_1\,,\cdots,p_n$ où chaque p_i apparaît k_i fois. La longueur de a est égale à $t = k_1 + \cdots + k_n$. Considérons alors pour chaque p_i $(i = 1\,,\cdots,n)$ l'ensemble $Hp_i = \{h \in \mathbf{N}\,;\, a \leq p_i^h\}$. Cet ensemble n'est pas vide car $a \leq p_i^{k_i}$ et de plus il est borné supérieurement par t. En effet, si $a \leq p_i^s$ avec $s > t$; alors $a = p_i^s\,c$ avec $c = e$ ou $c \neq e$, et dans les deux cas c'est impossible d'après la condition (d). Donc chaque ensemble Hp_i admet un élément maximum; c'est-à-dire qu'*il existe pour chaque* p_i $(i = 1\,,\cdots,n)$ *un entier* m_i (> 0) *maximal tel que* $a \leq p_i^{m_i}$.

On a $a \leq p_i^{m_i}$ $(i = 1\,,\cdots,n)$ d'où $a = p_i^{m_i}$ si et seulement si $n = i = 1$. Si $n > 1$, on aura $a < p_1^{m_1}$; il existe alors c_1 tel que $a = p_1^{m_1}\,c_1 < p_2^{m_2}$. Posons $\alpha = p_1^{m_1}$, $\beta = p_2^{m_2}$ et $\nu = c_1$, on a $\alpha \vee \beta = e$ et $\alpha\nu < \beta$; d'après (a) il s'ensuit que $\nu \leq \beta$. Donc on a $c_1 \leq p_2^{m_2}$, d'où $a = p_1^{m_1}\,c \leq p_1^{m_1}\,p_2^{m_2}$. On continue le processus et obtient $a = p_1^{m_1}(\cdots(p_{n-1}^{m_{n-1}}\,c_{n-1})\cdots)$ où $c_{n-1} \leq p_n^{m_n}$. Si $c_{n-1} < p_n^{m_n}$, d'après (c) il existe c' tel que $c_{n-1} = p_n^{m_n}\,c'$ $(c' \neq e\,, O)$ où $c' = q_1'\,(\cdots q_s'),\, q_1'\,,\cdots,q_s'$ sont des éléments premiers (d'après la Remarque 1.1). Mais puisque a est un produit en $p_1\,,\cdots,p_n$ et $a = p_1^{m_1}\,(\cdots(p_{1-1}^{m_{n-1}}\,(p_n^{m_n}\,c'))\cdots)$, on a que $q_1'\,,\cdots,q_s'$ sont compris parmi les $p_1\,,\cdots,p_n$; ce qui exige qu'il existe un j tel que $a \leq p_j^{m_j+1}$, contradiction qui entraîne que $c_{n-1} = p_n^{m_n}$ et $a = p_1^{m_1}\,(p_2^{m_2}\,(\cdots p_n^{m_n})\cdots)\,,\cdots$(I).

Remarque 1.3. – En vertu de la signification intrinseque des m_i et de ce qui précède on a: *la représentation* (I) *de* $a \in G$ $(a \neq e\,, O)$ *est unique à l'ordre près* et dans toute autre représentation en produit fini de puissances d'éléments premiers distincts chaque p_i figure au plus m_i fois et à cause de (d), seulement m_i fois.

1.7) G *est associatif.* Le produit ab de deux éléments quelconques $(a\,,b \in G;\ a\,,b \neq e$ et $a\,,b \neq 0)$ est égal au produit des représentations (I) de a et de b. Mais l'élément $ab \in G$ $(ab \neq e\,, O)$ a aussi une telle représentation. La Remarque 1.3 exige que ces deux représentations de ab consistent en les mêmes éléments premiers et chaque élément distinct figure le même nombre de fois dans les deux représentations de ab. De la même façon, le produit $(ab)\,c$ de ab et c $(c \in G\,;\, c \neq e\,, O)$ a une représentation de la forme (I) et cette représentation est exactement celle du produit $a\,(bc)$. Il s'ensuit que $a\,(bc) = (ab)\,c$ pour $a\,,b\,,c \neq e$ et $a\,,b\,,c\,, \neq 0$ d'où $a\,(bc) = (ab)\,c$ pour tout $a\,,b\,,c \in G$.

Donc G est bien un demi-groupe de Dedekind. Puisque la nécessité est évidente, le premier théorème est démontré.

THEOREME 2. – *Un groupoïde ordonné* G $(O \leq x \leq e$ *pour tout* $x \in G)$ *est un demi-groupe de Dedekind si et seulement s'il vérifie les conditions*:

(α) *Tout* $a \in G$ $(a \neq e, O)$ *est majoré par un nombre fini d'éléments maximaux distincts* $m_1, \cdots, m_n$ *et il existe au moins un* m_i *et un entier* h (> 0) *tel que* h *soit maximum parmi les longueurs des produits en* m_i *majorant* a.

(β) *Si un produit fini d'éléments maximaux* $m_1, \cdots, m_n$ *(distincts ou non) est inférieur ou égal à un produit en* m *(*m *étant un élément maximal quelconque) de longueur* k, *alors* m *apparaît au moins* k *fois parmi les* m_i $(i = 1, \cdots, n)$.

(γ) $a < b$ *entraine qu'il existe* $c \in G$ *tel que* $a = bc$.

2.1) *Tout élément* $a \in G$ $(a \neq e, O)$ *est représentable en produit fini d'éléments maximaux*. D'après la condition (α), a est majoré par un nombre fini d'éléments maximaux $m_1, \cdots, m_n$ et il existe un élément parmi eux, soit m_1, et un entier h_1 (> 0) tel que h_1 est maximum parmi les longueurs des produits en m_1 majorant a. Donc il existe un produit en m_1, $P_1(m_1)$, de longueur h_1 tel que $a \leq P_1(m_1)$. D'après (γ), il existe $c_1 \in G$ $(c_1 \neq 0)$ tel que $a = P_1(m_1)\, c_1$ avec $c_1 = e$ ou $c_1 \neq e$. Si $c_1 \neq e$, la condition (α) entraîne que c_1 est majoré par un nombre fini d'éléments maximaux. Puisque $a = P_1(m_1)\, c_1 \leq c_1$, ces éléments maximaux sont compris parmi les éléments $m_2, m_3, \cdots, m_n$. Si $c_1 \leq m_1$, on aurait $a \leq P_1(m_1)\, m_1$, ce qui contredit la définition de h_1. D'après (α), il existe un élément, soit m_2, parmi les $m_2, \cdots, m_n$ et un entier h_2 (> 0) tel que h_2 est maximum parmi les longueurs des produits en m_2 majorant c_1. On répète le processus ci-dessus en remplaçant a par c_1 et $m_1, \cdots, m_n$ par $m_2, \cdots, m_n$ et on reitère le procédé jusqu'à épuisement de l'ensemble $m_1, \cdots, m_n$ d'où $a \leq a' = P_1(m_1)\, [P_2(m_2)\, [\cdots P_n(m_n)] \cdots]$.

Si $a < a'$, il existe $c \neq e, O$ tel que $a = a'\, c$ et puisque c est majoré par des éléments maximaux, il existe au moins un m_j tel que $a \leq P_j(m_j)\, m_j$. Donc $a = a'$ et on a

$$a = P_1(m_1)\, [P_2(m_2)\, [\cdots P_n(m_n)] \cdots], \cdots \text{(II)}.$$

Remarque 2.1. – *La représentation* (II) *de* a *est unique à l'ordre près*. Supposons, en effet, que a soit égal à une autre représentation en produit fini d'éléments maximaux $v_1, \cdots, v_s$. En vertu de l'isotonie, a est majoré par chaque facteur des deux représentations. D'après la condition (β), les $v_1, \cdots, v_s$ et les $m_1, \cdots, m_n$ sont identiques et, de plus, chaque élément distinct figure le même nombre de fois dans les deux représentations. Donc on a aussi: *pour deux produits finis égaux d'éléments maximaux, le nombre de facteurs est le même dans les deux produits*, ce qui est la condition (d) du premier théorème.

2.2) Le même raisonnement que dans 1.5) montre que *pour tout élément maximal* $m \in G$, m^h $(h > 0)$ *est défini*.

2.3) *Les éléments maximaux commutent*. Soient $m_1, m_2 \in G$ deux éléments maximaux distincts. On a, en vertu de l'isotonie, $m_1 m_2 \leq m_2$. Si $m_1 m_2 = m_2$, l'isotonie entraînerait que $m_2 \leq m_1$, ce qui est absurde puisque m_2 est maximal et $m_1 \neq m_2$. Donc $m_1 m_2 < m_2$, et il existe c tel que $m_1 m_2 = m_2 c$ où $c \neq e$, O. D'après 2.1), c est égal à un produit fini d'éléments maximaux $u_1, \cdots, u_r$. Puisque $m_2 \not\leq m_1$ et $m_1 m_2 = m_2 c \leq m_1$, (β) entraîne que m_1 égale au moins un u_i $(i = 1, \cdots, r)$, soit $u_1 = m_1$. On a $c \leq u_1 = m_1$, d'où $m_1 m_2 = m_2 c \leq m_2 m_1$ et de même, $m_2 m_1 \leq m_1 m_2$; donc $m_1 m_2 = m_2 m_1$.

Remarque 2.2. – De 2.1), 2.2), 2.3) et de la Remarque 2.1 résulte que *tout élément* $a \in \mathrm{G}$ $(a \neq e, \mathrm{O})$ *est représentable d'une manière unique en produit fini de puissances d'éléments maximaux, distincts et deux à deux permutables.*

2.4) Le même raisonnement que dans 1.7) montre que G *est associatif.*

G est donc un demi-groupe de Dedekind; puisque la nécessité est évidente, le théorème est démontré.