
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CAROL KALIK

Sur la solution d'une certaine équation fonctionnelle

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.4, p. 339–344.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_339_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sur la solution d'une certaine équation fonctionnelle.* Nota di CAROL KALIK, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

RIASSUNTO. — In questa Nota si considera l'equazione funzionale

$$F(f) = \int_a^b \varphi(x) f^{(n)}(x) dx.$$

in cui $F(f)$ è un funzionale dato e $\varphi(x)$ è la funzione incognita, la quale equazione si incontra in numerosi problemi di analisi numerica. Nella Nota si dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione $\varphi(x)$, fondandosi su metodi di calcolo variazionale. Viene dato anche un metodo per il calcolo diretto dell'integrale.

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx.$$

Dans de nombreux travaux dont on pourrait citer [1], [2] et [3] on utilise avec succès la méthode de la fonction φ pour étudier certains problèmes de l'analyse numérique. Ainsi à l'aide de cette méthode furent obtenus des résultats considérables en ce qui concerne la délimitation du reste pour diverses formules de quadrature, la représentation intégrale des différences divisées et l'étude du reste pour certaines formules d'interpolation.

Dans le présent travail nous établissons une propriété de minimum de la fonction φ , valable pour tous les cas d'application de cette fonction, aussi bien quand il s'agit de l'étude du reste pour les formules de quadrature, que dans le cas de représentation intégrale des différences divisées, ainsi que dans d'autre cas. En même temps on obtient un théorème général d'existence et d'unicité de la fonction φ .

1. — L'idée de base est formulée dans l'observation suivante: la fonction φ , quelles que soient ses applications, peut être considérée comme la solution d'une equation fonctionnelle de la forme

$$(I,1) \quad F(f) = \int_a^b \varphi(x) f^{(n)}(x) dx$$

considérée sur les fonctions de la classe $C^{(n)}[a, b]$. Ici F est une fonctionnelle donnée dont la forme dépend du problème concret étudié. Par exemple, dans le cas du reste pour une formule de quadrature elle a la forme suivante

$$(I,2) \quad F(f) = \int_a^b f(x) p(x) dx - \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{\mu_i} \lambda_{ij} f^{(j)}(x_i).$$

(*) Nella seduta del 19 aprile 1969.

Nous rattachons à l'équation fonctionnelle (1,1) la fonctionnelle G de la forme

$$(1,3) \quad G(f) = \int_a^b [f^{(n)}(x)]^2 dx - 2 F(f)$$

Il faut mentionner que la fonctionnelle G a été choisie de sorte que (1,1) soit justement sa variation.

2. - Nous allons noter par $H^{(n)}(a, b)$ l'ensemble des fonctions $f \in L_2(a, b)$ qui satisfont les conditions suivantes:

$$a) f(x) \in C^{(n-1)}[a, b]$$

$b) f^{(n-1)}(x)$ est absolument continue et $f^{(n)}(x) \in L_2(a, b)$. L'ensemble linéaire $H^{(n)}(a, b)$ avec le produit scalaire

$$(f, g)_n = \sum_{j=0}^n \int_a^b f^{(j)}(x) g^{(j)}(x) dx$$

devient un espace de Hilbert. On note $\|f\|_n = \sqrt{(f, f)_n}$.

LEMME 2.1. - Si $p(x) \in L_2(a, b)$ et si $\mu_i < n$ ($i = 0, 1, \dots, m+1$), alors la fonctionnelle donnée par (1,2) est continue sur $H^{(n)}(a, b)$.

Démonstration. - A l'aide de l'inégalité de Cauchy, on peut écrire

$$\left| \int_a^b f(x) p(x) dx \right|^2 \leq \|p\|^2 \|f\|^2 \leq \|p\|^2 \|f\|_n^2$$

d'où il résulte la continuité de $\int_a^b f(x) p(x) dx$.

Soit

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$$

une suite de fonctions de l'espace $H^{(n)}(a, b)$, de sorte que $f_k(x) \xrightarrow{H^{(n)}(a, b)} 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Nous démontrons que

$$f_k^{(j)}(x_i) \rightarrow 0 \quad \text{quand } k \rightarrow \infty.$$

Pour cela nous choisissons une fonction $\zeta(x) \in C^{(n)}[a, b]$ de telle manière qu'elle satisfasse les conditions suivantes

$$a) \zeta(x) \equiv 1 \text{ dans un voisinage de } x_i$$

$$b) \zeta(x) \equiv 0 \text{ sur un ensemble non vide de } [a, b].$$

Soit $\psi_k(x) = \zeta(x) \cdot f_k(x)$. Nous choisissons un point $x^* \in [a, b]$ de sorte que $\zeta(x^*) = 0$. Alors on peut écrire

$$\psi_k^{(j)}(x) = \pm \int_a^b \frac{d\psi_k^{(j)}}{dt} dt = \pm \int_a^b \sum_{v=0}^j C_v \zeta^{(v)}(t) f_k^{(j-v)}(t) dt.$$

En appliquant cette fois encore l'inégalité de Cauchy on obtient

$$|\psi_k^{(j)}(x)| \leq N \sum_{v=0}^j \|f_k^{(j-v)}\|$$

où la constante N est choisie de telle manière que $\max |\zeta^{(v)}(t)| \|c_v\| \sqrt{b-a} < N_0$.

Cependant, vu que $f_k(x) \xrightarrow{H^{(n)}(a,b)} 0$ il s'ensuit $\psi_k^{(j)}(x) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Donc, nous avons en particulier $f_k^{(j)}(x_i) = \psi_k^{(j)}(x_i) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. C'est qu'on avait à démontrer.

Remarque. — Nous avons effectué la démonstration du lemme pour le cas particulier quand F coïncide avec la fonctionnelle reste. Mais il est évident que ce procédé pourra être appliqué aussi dans les autres cas.

Nous notons par $\mathfrak{S}_{n-1}$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n-1$. Nous considérons l'espace des classes d'équivalence

$$L_2^{(n)}(a, b) = \frac{H^{(n)}(a, b)}{\mathfrak{S}_{n-1}}$$

ayant le produit scalaire $[f, g]_n = \int_a^b f^{(n)}(x) g^{(n)}(x) dx$ et la norme

$|f|_n = \sqrt{[f, f]_n}$. Ici $f(x)$ respectivement $g(x)$ sont des représentants des classes respectives. $L_2^{(n)}(a, b)$ est un espace de Hilbert [4].

LEMME 2.2. — Si $p(x) \in L_2(a, b)$, $\mu_i < n$ ($i = 0, 1, \dots, m+1$) et si $F(P_{n-1}) = 0$ pour chaque $P_{n-1} \in \mathfrak{S}_{n-1}$, alors F est une fonctionnelle continue sur $L_2^{(n)}(a, b)$.

Démonstration. — On introduit d'abord sur $H^{(n)}(a, b)$ encore une norme. Soit

$$(2,1) \quad \Pi(f) = \sum_{k=0}^{n-1} l_k(f) x^k$$

où

$$(2,2) \quad l_k(f) = \sum_{j=0}^{n-1} a_k^{(j)} \int_a^b f^{(j)}(x) dx$$

dont les constantes $a_k^{(j)}$ sont des solutions du système d'équations suivant

$$(2,3) \quad l_k(x^\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = k \\ 0 & \text{si } \mu \neq k \end{cases} \quad (\mu = 0, 1, \dots, n-1).$$

On peut vérifier facilement que le déterminant de ce système est différent de zéro, et par conséquent le système a une solution.

Nous résumons les deux propriétés importantes de la transformation Π :

a) $\Pi(f) \in \mathfrak{S}_{n-1}$ ce qui découle de (2,1).

b) $\Pi(P_{n-1}) = P_{n-1}$ pour chaque $P_{n-1} \in \mathfrak{S}_{n-1}$, ce qui découle de (2,3).

Nous notons

$$\|\Pi(f)\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |l_k(f)|^2$$

et définissons la seconde norme de l'espace $H^{(n)}(a, b)$ à l'aide de l'égalité suivante

$$(2,4) \quad \|f\|^2 = |f|_n^2 + \|\Pi(f)\|^2$$

A l'aide des calculs simples on peut démontrer qu'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 de sorte qu'on aura

$$C_1 \|f\|_n^2 \leq \|f\|^2 \leq C_2 \|f\|_n^2$$

Cela signifie que les deux normes définies sur $H^{(n)}(a, b)$ sont équivalentes. Par conséquent, vu le lemme 2.1, on aura que la fonctionnelle F est bornée aussi par rapport à la seconde norme de $H^{(n)}(a, b)$: $|F(f)| \leq K \|f\|$.

Après cette introduction nous passons à la démonstration proprement dite du lemme. Dans ce but il nous suffit de montrer que $|F(f)| \leq K |f|_n$ pour chaque $f(x) \in H^{(n)}(a, b)$.

Etant donné $F(\Pi(f)) = 0$, on a $F(f) = F(f - \Pi(f))$. Par conséquent on peut écrire

$$\begin{aligned} |F(f)|^2 &= |F(f - \Pi(f))|^2 \leq K^2 \|f - \Pi(f)\|^2 = K^2 \{|f - \Pi(f)|_n^2 + \\ &+ \|\Pi(f - \Pi(f))\|^2\} = K^2 |f|_n^2 \end{aligned}$$

qui est justement l'inégalité qu'on cherchait. De cette façon le lemme se trouve démontré.

3. Nous formulons les conclusions fondamentales du travail en deux théorèmes.

THEOREME 3.1. - *La fonctionnelle G considérée sur l'espace de Hilbert $L_2^{(n)}(a, b)$ a un minimum absolu et ce minimum est atteint sur un seul élément de $L_2^{(n)}(a, b)$.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème représente une démonstration de routine. Nous allons nous servir de la méthode exposée dans [4].

L'inégalité $|F(f)| < K |f|_n$ nous permet d'écrire

$$G(f) = |f|_n^2 - 2F(f) \geq |f|_n^2 - 2K |f|_n = (|f|_n - K)^2 - K^2 \geq -K^2.$$

Il s'ensuit que l'ensemble de valeurs $\{G(f)\}$, lorsque $f(x)$ parcourt sur $H^{(n)}(a, b)$, est borné inférieurement. Nous notons $d = \inf G(f)$.

Soit $f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$ une suite minimisante, c'est à dire une suite pour laquelle on a $\lim_{k \rightarrow \infty} G(f_k) = d$. Nous démontrons que cette suite minimisante est fondamentale dans $L_2^{(n)}(a, b)$. Il résulte de l'identité

$$\left| \frac{u-v}{2} \right|_n^2 = \frac{1}{2} G(u) + \frac{1}{2} G(v) - G\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

facile à vérifier, que pour chaque nombre positif $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre positif N de sorte qu'on ait

$$\left| \frac{f_k - f_\varepsilon}{2} \right|_n^2 = \frac{1}{2} G(f_k) + \frac{1}{2} G(f_\varepsilon) - G\left(\frac{f_k + f_\varepsilon}{2}\right) < \frac{d + \varepsilon}{2} + \frac{d + \varepsilon}{2} - d = \varepsilon$$

chaque fois que $k, l > N$. Cette inégalité nous montre que la suite minimisante est fondamentale dans $L_2^{(n)}(a, b)$. Cependant $L_2^{(n)}(a, b)$ est un espace de Hilbert, donc un espace complet; par conséquent il y a une fonction ψ qui représente une classe dans $L_2^{(n)}(a, b)$, de sorte qu'on ait $f_k(x) \xrightarrow{L_2^{(n)}(a, b)} \psi(x)$ quand $k \rightarrow \infty$.

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} |G(\psi) - G(f_k)| &= \left| |\psi|_n^2 - |f_k|_n^2 + 2F(f_k - \psi) \right| \leq \left| |\psi|_n - |f_k|_n \right| + \\ &\quad + 2K |f_k - \psi|_n \end{aligned}$$

d'où il résulte que $G(f_k) \rightarrow G(\psi)$ quand $k \rightarrow \infty$. Par conséquent $\min G(f)$ existe et $\min G(f) = G(\psi)$.

Il ne reste à démontrer que la classe de $L_2^{(n)}(a, b)$ représentée par la fonction ψ est la seule classe qui réalise le minimum de la fonctionnelle G . Supposons qu'à côté de $\min G(f) = G(\psi)$ il y ait $\min G(f) = G(\psi_1)$. La variation de G en ψ est

$$\int_a^b \psi^{(n)} f^{(n)} dx = F(f)$$

tandis qu'en ψ_1 elle est

$$\int_a^b \psi_1^{(n)} f^{(n)} dx = F(f).$$

Après avoir fait la différence de ces égalités nous obtenons $\int_a^b [\psi^{(n)} - \psi_1^{(n)}] \cdot$

$f^{(n)} dx = 0$ pour chaque $f \in H^{(n)}(a, b)$, ce qui nous prouve que $\psi - \psi_1 = P_{1-n}$; c'est à dire que ψ et ψ_1 font partie de la même classe. De cette façon le théorème se trouve complètement démontré.

THEOREME 3.2. — Soit $\varphi(x)$ la solution de l'équation fonctionnelle (I, I), alors

$$(3,1) \quad \min G(f) = - \int_a^b \varphi^2 dx$$

et ce minimum est réalisé par une solution quelconque de l'équation différentielle

$$(3,2) \quad \psi^{(n)} = \varphi(x)$$

Démonstration. - Soit $\psi(x)$ la fonction pour laquelle $G(f)$ atteint son minimum. La variation de G dans le point ψ sera

$$\int_a^b \psi^{(n)} f^{(n)} dx = F(f)$$

où $f \in H^{(n)}(a, b)$. En comparant cette égalité à (1,1) on trouve $\int_a^b [\varphi - \psi^{(n)}] \cdot f^{(n)} dx = 0$ pour chaque $f \in H^{(n)}(a, b)$, c'est à dire que $\psi^{(n)}(x) = \varphi(x)$. Par conséquent, le minimum de $G(f)$ est en effet réalisé par une solution quelconque de (3,2).

Pour démontrer l'égalité (3,1) il est suffit d'observer que $F(\psi) = \int_a^b [\psi^{(n)}]^2 dx = \int_a^b \varphi^2 dx$ ce qui nous permet d'écrire

$$\min G(f) = G(\psi) = \|\psi\|_n^2 - 2 F(\psi) = \int_a^b \varphi^2 dx - 2 \int_a^b \varphi^2 dx = - \int_a^b \varphi^2 dx$$

La-dessus le théorème 3.2 est démontré.

Les deux théorèmes démontrés plus haut nous permettent de tirer quelques conclusions qui sont formulées dans ce qui suit.

Remarque 1. - Le théorème 3.1 donne une nouvelle démonstration d'existence et d'unicité de la fonction φ , qui ne dépend pas de problème concrets d'analyse numérique dans lesquels apparaît l'équation fonctionnelle (1,1). Cette démonstration ne demande pas la forme concrète de la fonctionnelle F . Ce qu'elle demande c'est que F soit continue sur $H^{(n)}(a, b)$ est qu'elle satisfasse la propriété $F(P_{n-1}) = 0$ pour chaque $P_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}$.

Remarque 2. - La constante $\int_a^b \varphi^2 dx$ étant la norme de la fonctionnelle F , elle nous offre la meilleure délimitation de F dans la métrique de l'espace $L_2^{(n)}(a, b)$. Conformément au théorème 3.2 on peut calculer cette valeur directement à l'aide des méthodes connues du calcul variationnel.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. RADON, *Restausdrucke bei Interpolations und Quadrature Formeln durch bestimmte Integralen*, « Monatshefte für Mathematik und Physik », 42, 389 (1935).
- [2] A. GIZETTI, *Sulle formule di quadrature*, « Rendiconti del Sem. Mat. e Fisico di Milano », 26, 45-60 (1954-55).
- [3] D. V. IONESCU, *Cuadraturi numerice*, Ed. Tehnica, București 1957.
- [4] S. L. SOBOLEV, *Quelques applications de l'analyse fonctionnelle dans la physique mathématique*, Leningrad 1950.