
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

EMANOIL ARGHIRIADE, ACHIM DRAGOMIR

**Remarques sur quelques théorèmes relatives à
l'inverse généralisée d'un opérateur linéaire dans les
espaces de Hilbert**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.4, p. 333–338.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_333_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Remarques sur quelques théorèmes relatives à l'inverse généralisée d'un opérateur linéaire dans les espaces de Hilbert.*
Nota di EMANOIL ARGHIRIADE e ACHIM DRAGOMIR, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si estende con opportune modifiche un risultato ottenuto in una precedente Nota lineea [5], concernente l'argomento specificato nel titolo.

1. Soient $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ des espaces de Hilbert; A un opérateur linéaire $\mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_2$; l'inverse généralisée de A , (brièvement i.g.) est un opérateur $A^+, \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_1$, défini par Y. Y. Tseng [1], [2], [3], [4] qui a énoncé aussi un théorème donnant une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'i.g. Pour d'autres informations bibliographiques nous renvoyons à [5].

Une définition simplifiée de l'i.g. se trouve dans [5]. Rappelons le théorème de Y. Y. Tseng [1; p. 432], [4; pp. 673-4], les notations étant celles de [5]: *Un opérateur linéaire $A: \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_2$, $(\mathfrak{D}(A)) = \mathfrak{H}_1$ admet une i.g. si et seulement si*

$$(1) \quad \mathfrak{D}^1 = \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{R}(A) \oplus (\mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(A)^\perp).$$

Dans ce cas A admet une i.g. maximale unique $A_{\max}^+$ pour laquelle $\mathfrak{D}(A_{\max}^+)$ est maximum et pour laquelle

$$\mathfrak{D}_{\max}^2 = \mathfrak{D}(A_{\max}^+) = \mathfrak{R}(A) \oplus \mathfrak{R}(A)^\perp \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}(A_{\max}^+) = \mathfrak{R}(A)^\perp$$

toute autre i.g., A^+ est une restriction de $A_{\max}^+$; $A_{\max}^+$ est la seule i.g. possédant un espace nul fermé.

Pour ce théorème on a donné un énoncé simplifié [5]; le théorème reste encore vrai pour un opérateur A pour lequel $\mathfrak{D}(A)$ n'est pas nécessairement dense dans $\mathfrak{H}_1$; *la dernière partie du théorème de Tseng, tel qu'il est énoncé plus haut, doit être modifiée*, et nous nous proposons de montrer de quelle manière.

2. Rappelons quelques propriétés de l'i.g. A^+ , qui ont été établies dans [5]

$$(2) \quad \mathfrak{D}^1 = \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{R}(A) \oplus \mathfrak{R}(A^+) \quad ; \quad \mathfrak{R}(A^+) = \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{R}(A)^\perp ;$$

$$\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{D}^1 \cap (\mathfrak{R}(A^+))^\perp$$

$$(3) \quad \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{D}(A^+) = \mathfrak{R}(A^+) \oplus \mathfrak{R}(A) \quad ; \quad \mathfrak{R}(A) = \mathfrak{D}^2 \cap \mathfrak{R}(A^+)^\perp ;$$

$$\mathfrak{R}(A^+) = \mathfrak{D}^2 \cap \mathfrak{R}(A)^\perp$$

(*) Nella seduta del 19 aprile 1969.

les sommes considérées étant des sommes directes orthogonales. L'opérateur A détermine une application biunivoque entre $\mathfrak{R}(A^+)$ et $\mathfrak{R}(A)$ et A^+ une application biunivoque entre $\mathfrak{R}(A)$ et $\mathfrak{R}(A^+)$; si $\tilde{A}$, $\tilde{A}^+$ sont les restrictions des opérateurs A , A^+ pour $\mathfrak{R}(A^+)$, $\mathfrak{R}(A)$ resp. on a

$$(4) \quad \tilde{A}^+ = \tilde{A}^{-1}.$$

A chaque sousespace $S \subseteq \mathfrak{R}(A)^\perp$ correspond une i.g. A^+ ; pour A^+ et pour $A_{\max}^+$ ($S = \mathfrak{R}(A)^\perp$), on a

$$(4') \quad \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{D}(A^+) = \mathfrak{R}(A) \oplus S \quad ; \quad \mathfrak{D}_{\max}^2 = \mathfrak{D}(A_{\max}^+) = \mathfrak{R}(A) \oplus \mathfrak{R}(A)^\perp,$$

$$(5) \quad \mathfrak{U}(A^+) = S \quad ; \quad \mathfrak{U}(A_{\max}^+) = \mathfrak{R}(A)^\perp \quad ; \quad \mathfrak{R}(A^+) = \mathfrak{R}(A_{\max}^+) = \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{U}(A)^\perp.$$

3. LEMME. Dans un espace de Hilbert $\mathfrak{K}$, considérons les sous-espaces S et S_1 ($S \cap S_1 = 0$) et la somme orthogonale directe

$$(6) \quad \mathfrak{L} = S \oplus S_1$$

le sous-espace $\mathfrak{L}$ est dense dans $\mathfrak{K}$, si et seulement si $\bar{S} = \bar{S}_1^\perp$, $\bar{S}_1^\perp$ étant le complément orthogonal de S dans $\mathfrak{K}$.

Nous avons toujours la relation

$$(7) \quad \mathfrak{K} = \bar{S}_1 \oplus \bar{S}_1^\perp.$$

Supposons $\bar{S} = S_1^\perp = \bar{S}_1^\perp$; si pour $v \in \mathfrak{K}$ nous avons $v \perp \mathfrak{L}$, on a en particulier $v \perp S$, donc $v \perp \bar{S}$ et $v \in \bar{S}^\perp = (\bar{S}_1^\perp)^\perp = \bar{S}_1$. On a aussi en particulier $v \perp S_1$, donc $v \perp \bar{S}_1$ et $v \in \bar{S}_1^\perp$. Donc $v \in \bar{S}_1 \cap \bar{S}_1^\perp = 0$ et puisque $v = 0$, $\mathfrak{L}$ est dense. Réciproquement supposons $\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{K}$; tout point $y \in \mathfrak{K}$ est un point adhérent de $\mathfrak{L}$ et si $y \notin \mathfrak{L}$, alors y est un point d'accumulation de $\mathfrak{L}$. Soit $y \in S_1^\perp$; puisque y est un point adhérent de $\mathfrak{L}$, nous avons une suite $\{y_n\} \subset \mathfrak{L}$ telle que $\{y_n\} \rightarrow y$. En vertu de (7) on déduit $y_n = \eta_n + \zeta_n$, $\eta_n \in S$, $\zeta_n \in S_1$. Soit P le projecteur de $\mathfrak{K}$ sur $S_1^\perp$; comme P est linéaire et continu [6; p. 102] de la relation $\{\eta_n + \zeta_n\} \rightarrow y$, on déduit $\{P\eta_n + P\zeta_n\} \rightarrow Py$. Mais $P\eta_n = \eta_n$ car $S \subset S_1^\perp$ et on a aussi $P\zeta_n = 0$, car $\zeta_n \in S_1$ et $S_1 \perp S_1^\perp$; $Py = y$. Donc $\{\eta_n\} \rightarrow y$, avec $\{\eta_n\} \subset S$. Donc tout $y \in S_1^\perp$ est un point adhérent pour S , donc $S_1^\perp \subseteq \bar{S}$.

D'autre part $S \perp S_1 \Rightarrow \bar{S} \perp S_1$ et donc $\bar{S} \subseteq S_1^\perp$. Des inclusions $S_1^\perp \subseteq \bar{S}$ et $\bar{S} \subseteq S_1^\perp$ on déduit $\bar{S} = S_1^\perp$.

4. Soit S un sous-espace d'un espace de Hilbert $\mathfrak{K}$, de dimension infinie. Sur S on peut faire les hypothèses

$$(8) \quad 1^0 \ S = \bar{S} \neq \mathfrak{K}, \quad 2^0 \ S \neq \bar{S} \quad \text{et} \quad \bar{S} \neq \mathfrak{K}, \quad 3^0 \ \bar{S} = \mathfrak{K}, \quad (S = \bar{S} \text{ ou } S \neq \bar{S}),$$

Dans un espace de Hilbert il existe une infinité de sous espaces appartenant à chacune de ces trois classes; cela est connu et on peut d'ailleurs le démontrer directement avec facilité. $\mathfrak{R}(A)^\perp$ est un sous-espace fermé de $\mathfrak{K}$ [6; p. 83] et est à son tour un espace de Hilbert; en prenant pour $S \subseteq \mathfrak{R}(A)$ un sous-espace fermé de $\mathfrak{R}(A)^\perp$ (il y a une infinité de pareilles sous espaces, par

exemple les sous espaces de dimension finie) la première formule (5) montre que $\mathfrak{U}(A^+)$ est fermé. Y. Y. Tseng avait affirmé que $A_{\max}^+$ est la seule i.g. qui a un espace nul fermé; d'après ce qui précède on voit qu'il y a en réalité une infinité d'i.g. ayant un espace nul fermé; l'explication de cette affirmation de Tseng se trouve à la fin du nr. 5.

5. Revenons aux formules (4)

$$(9) \quad \mathfrak{D}(A^+) = \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{K}(A) \oplus S \quad ; \quad \mathfrak{D}_{\max}^2 = \mathfrak{D}(A_{\max}^+) = \mathfrak{K}(A) \oplus \mathfrak{K}(A)^\perp$$

($S \subseteq \mathfrak{K}(A)^\perp$, $S = \mathfrak{U}(A^+)$). Comme $\mathfrak{K}(A)^\perp$ est aussi un espace de Hilbert, il existe donc dans $\mathfrak{K}(A)^\perp$ une infinité de sous-espaces S appartenant à chaque des classes (8); à l'aide des formules (9) et en appliquant le lemme, on peut déterminer dans chaque cas, si $\mathfrak{D}(A^+)$ est dense ou non.

THEOREME 1. Les i.g. d'un opérateur A se partagent en deux catégories:

I. Il existe une infinité d'i.g. A^+ , pour lesquelles $\mathfrak{D}(A^+)$ est dense; pour ces i.g. on a $\overline{\mathfrak{U}(A^+)} = \mathfrak{K}(A)^\perp$ et réciproquement; parmi ces i.g. se trouve $A_{\max}^+$. Il suffit de prendre pour S , dans (9) un sousespace appartenant à la classe 3^0 , de (8), $\bar{S} = \mathfrak{K} = \mathfrak{K}(A)^\perp$.

II. Il existe aussi une infinité d'i.g. pour lesquelles $\mathfrak{D}(A^+)$ n'est pas dense; pour ces i.g. on a $\overline{\mathfrak{U}(A^+)} \neq \mathfrak{K}(A)^\perp$ et réciproquement, car si on avait $\overline{\mathfrak{U}(A^+)} = \mathfrak{K}(A)^\perp$ alors en vertu du lemme, A serait dense; il suffit de prendre pour S dans (9) un sousespace de $\mathfrak{K}(A)^\perp$ appartenant à la classe 1^0 ou 2^0 de (8). Parmi les i.g. de la catégorie II il existe une infinité pour lesquelles $\mathfrak{U}(A^+) = \mathfrak{U}(A^+) = \mathfrak{K}(A)^\perp$ et il existe aussi une infinité pour lesquelles $\mathfrak{U}(A^+) \neq \mathfrak{U}(A^+)$ et $\mathfrak{U}(A^+) \neq \mathfrak{K}(A)^\perp$. Comme il en résulte de (8).

Y. Y. Tseng ne considère que des opérateurs pour lesquels $\mathfrak{D}(A)$ et $\mathfrak{D}(A^+)$ sont denses dans $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ c'est à dire qu'il considère seulement les opérateurs de la catégorie I sans prendre en considération ceux de la catégorie II. Or si $\mathfrak{D}(A^+)$ est dense, d'après le théorème précédant $\overline{\mathfrak{U}(A^+)} = \mathfrak{K}(A)^\perp$ et par conséquent $\mathfrak{U}(A^+) = S$ est en général non fermé, hormis pour $\mathfrak{U}(A_{\max}^+) = \mathfrak{K}(A)^\perp$, qui est fermé. La dernière partie du théorème de Tseng (nr. 1) doit être modifiée comme il suit: pour les i.g. ayant un domaine $\mathfrak{D}(A^+)$ dense, $A_{\max}^+$ est la seule i.g. admettant un espace nul fermé.

6. Supposons que $A: \mathfrak{K}_1 \rightarrow \mathfrak{K}_2$, est un opérateur fermé; on sait alors que $\mathfrak{U}(A)$ est un sous-espace fermé [7; p. 165]. Nous avons

$$(9') \quad \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{U}(A) \oplus \mathfrak{U}(A)^\perp.$$

Pour $x \in \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}^1$, on a $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathfrak{U}(A)$, $x_2 \in \mathfrak{U}(A)^\perp$; donc $x_2 = x - x_1 \in \mathfrak{D}^1$ et par conséquent $x_2 \in \mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{U}(A)^\perp$ et on déduit

$$(10) \quad \mathfrak{D}^1 = \mathfrak{U}(A) \oplus (\mathfrak{D}^1 \cap \mathfrak{U}(A)^\perp),$$

qui est précisément la relation (1); donc un opérateur fermé admet toujours des i.g.

Considérons une i.g. A^+ , pour laquelle $\mathfrak{U}(A^+)$ est un sous-espace fermé (on sait qu'il y a une infinité de pareilles i.g; voire nr. 5). D'après (3) nous avons

$$(11) \quad \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{R}(A) \oplus \mathfrak{U}(A^+).$$

Considérons les suites

$$(12) \quad \{y_n\} \subset \mathfrak{D}^2, \quad \{A^+ y_n\} \subset \mathfrak{R}(A^+).$$

D'après (11) on a

$$(13) \quad y_n = \eta_n + \zeta_n, \quad \eta_n \in \mathfrak{R}(A), \quad \zeta_n \in \mathfrak{U}(A^+)$$

on suppose ces suites convergentes

$$(14) \quad \{y_n\} = \{\eta_n + \zeta_n\} \rightarrow \eta; \quad \{A^+ y_n\} = \{A^+ \eta_n + A^+ \zeta_n\} = \{A^+ \eta_n\} \rightarrow \xi \in \overline{\mathfrak{R}(A^+)},$$

car $\zeta_n \in \mathfrak{U}(A^+)$. On sait que A^+ est un opérateur fermé, si et seulement si [6; p. 94]

$$(15) \quad \eta \in \mathfrak{D}^2, \quad \xi = A^+ \eta.$$

Soit P le projecteur de $\mathfrak{K}_2$ sur $\mathfrak{U}(A^+) = \overline{\mathfrak{U}(A^+)}$; comme P est linéaire et continu et comme d'après (11), $\mathfrak{U}(A^+) \perp \mathfrak{R}(A)$ il en résulte de (14)

$$(16) \quad \{Py_n\} = \{P\eta_n + P\zeta_n\} = \{P\zeta_n\} = \{\zeta_n\} \rightarrow P\eta = \eta_1 \in \mathfrak{U}(A^+)$$

car $\eta_n \in \mathfrak{R}(A)$ et en vertu de (11), $\eta_n \perp \mathfrak{U}(A^+)$; ensuite $\zeta_n \in \mathfrak{U}(A^+)$ et $P\zeta_n = \zeta_n$ et $\eta_1 \in \mathfrak{U}(A^+)$ puisque $\mathfrak{U}(A^+)$ est fermé.

Les suites $\{y_n\}$ et $\{\zeta_n\}$ sont convergentes en vertu de (14) et (16) et alors $\{\eta_n\} = \{y_n - \zeta_n\}$ est aussi convergente comme étant la différence de deux suites convergentes et alors de (13) et (15) on a

$$(17) \quad \{\eta_n\} = \eta - \eta_1, \quad (\eta_1 \in \mathfrak{U}(A^+)),$$

d'après (14) on a $A^+ y_n = A^+ \eta_n$; posons

$$(18) \quad A^+ y_n = A^+ \eta_n = x_n \in \mathfrak{R}(A^+).$$

Puisque A^+ établit une correspondance biunivoque (nr. 2) entre $\mathfrak{R}(A)$ et $\mathfrak{R}(A^+)$ et comme d'après (13) et (18), on déduit de (18) en vertu de (4)

$$(19) \quad Ax_n = \eta_n.$$

En tenant compte de (18), (14), (19), (17)

$$(19') \quad \{x_n\} = \{A^+ y_n\} = \{A^+ \eta_n\} \subset \mathfrak{R}(A^+); \quad \{x_n\} \rightarrow \xi \in \overline{\mathfrak{R}(A^+)}$$

$$(20) \quad \{Ax_n\} = \{\eta_n\} \subset \mathfrak{R}(A); \quad \{Ax_n\} \rightarrow \eta - \eta_1; \quad (\eta_1 \in \mathfrak{U}(A^+)).$$

Nous avons donc les suites convergentes

$$\{x_n\} \subset \mathfrak{R}(A^+); \quad \{x_n\} \rightarrow \xi \in \overline{\mathfrak{R}(A^+)}; \quad \{Ax_n\} \rightarrow \eta - \eta_1, \quad (\eta_1 \in \mathfrak{U}(A^+)).$$

Mais A est un opérateur fermé et [6; p. 94] nous avons

$$(20') \quad \xi \in \mathfrak{D}^1 \quad ; \quad \eta - \eta_1 = A\xi.$$

Nous savons d'après (19') que $\xi \in \overline{\mathfrak{R}(A^+)}$ et puisque $\xi \in \mathfrak{D}^1$ en vertu de (2): $\xi \perp \mathfrak{N}(A)$ et $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in \mathfrak{N}(A)$, $\xi_2 \in \mathfrak{R}(A^+)$. Considérons le produit scalaire

$$0 = (\xi, \mathfrak{N}(A)) = (\xi_1 + \xi_2, \mathfrak{N}(A)) = (\xi_1, \mathfrak{N}(A)), \text{ car } \xi_2 \in \mathfrak{R}(A^+) \text{ et } \xi_2 \perp \mathfrak{N}(A).$$

Comme $\xi_1 \in \mathfrak{N}(A)$ on déduit en particulière $(\xi_1, \xi_2) = 0$, donc $\xi_1 = 0$ et $\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_2 \in \mathfrak{R}(A^+)$. Dans les formules (20') nous avons

$$(21) \quad \xi \in \mathfrak{R}(A^+).$$

Alors $A\xi \in \mathfrak{R}(A)$ et de (20') on déduit $\eta = \eta_1 + A\xi \in \mathfrak{D}^2$ puisque d'après (16) $\eta_1 \in \mathfrak{N}(A^+)$, qui est la première formule (15). Nous avons encore $A^+ \eta = A^+ \eta_1 + A^+ A\xi$. Mais $A^+ \eta_1 = 0$ car $\eta_1 \in \mathfrak{N}(A^+)$ et en vertu de (21) et de (4), $A^+ A\xi = \xi$, donc $A^+ \eta = \xi$ qui est la seconde formule (15); donc A^+ est un opérateur fermé.

THEOREME 2. *Un opérateur fermé admet toujours des i.g. Toute i.g. ayant un espace nul fermé (et il y en a une infinité de pareilles i.g.) est également un opérateur fermé.*

Y. Y. Tseng avait affirmé [2; p. 607] [4; p. 674] qu'il existe une seule i.g., l'i.g. maximale qui est un opérateur fermé; nous voyons que contrairement à cette affirmation, il y a une infinité d'i.g. fermées

Remarque 1. Pour $A_{\max}^+$, on a de (5), $\mathfrak{N}(A_{\max}^+) = \mathfrak{R}(A)^\perp$ et comme $\mathfrak{R}(A)^+$ est un sousespace fermé de $\mathfrak{H}_2$, il en résulte d'après ce qui précède que $A_{\max}^+$ est un opérateur fermé; comme tout i.g. est une restriction de $A_{\max}^+$, il en résulte que toutes les i.g. d'un opérateur fermé, sont des opérateurs admettant une fermeture.

Remarque 2. Les calculs faits au commencement du nr. 6, permettent de tirer une conséquence plus générale: *un opérateur A ayant un espace nul fermé, admet des i.g.*

7. Soit A un opérateur admettant un adjoint A^* ; comme A^* est fermé [6; p. 97], l'adjoint A^* admet des i.g. Y. Y. Tseng a démontré la formule [1; p. 433], [4; p. 674]

$$(22) \quad \mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{R}(A)^\perp \oplus \mathfrak{R}(A^{++})$$

Comme $A^{++} = (A^+)^*$ cette formule suppose que A admet une i.g., qui à son tour admet un adjoint. En écrivant la première formule (2) pour A^* , au lieu de A , on a $\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{N}(A^*) \oplus \mathfrak{R}(A^{*+})$ et comme [1; p. 433] $\mathfrak{N}(A^*) = \mathfrak{R}(A)^\perp$ la formule précédente devient

$$(23) \quad \mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{R}(A)^\perp \oplus \mathfrak{R}(A^{*+}),$$

THEOREME 3. *Un opérateur adjoint A^* , admet toujours des i.g et est vérifiée la formule (23).* La formule (23) est plus générale que le formule (22), puisqu'elle ne suppose pas que A admet une i.g. D'ailleurs de (22) et (23) on déduit $\Re(A^{\dagger*}) = \Re(A^{*\dagger})$.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] YU. YA. TSENG, *L'inverse généralisée d'un opérateur linéaire non borné, entre deux espaces unitaires*, « Dokl. Akad. Nauk SSSR », NS, 67, 431-4 (1949) (en langue russe). Résumé dans « Math. Rev. », 11, 45 (1959).
- [2] YU. YA. TSENG, *Propriétés et classification des inverses généralisées des opérateurs fermés*. « Dokl. Akad. Nauk SSSR », NS, 67, 607-610 (1949) (en langue russe). Résumé dans « Math. Rev. », 11, 115 (1959).
- [3] YU. YA. TSENG, *Solutions virtuelles et inv. généralisée*. « Uspechi Mat. Nauk SSSR », NS, 11, 213-5 (1956). (en langue russe). Résumé dans « Math. Rev. », 18, 749 (1957).
- [4] A. BEN ISRAEL et A. CHARNES, *Contribution to the theory of generalised inverses*, « J. Soc. Industr. App. Math », 2, nr. 3, 667-699 (1963).
- [5] E. ARGHIRIADE, *Sur l'inverse généralisée d'un opérateur linéaire dans les espaces de Hilbert* « Rend. d. Lincei », 45, fasc. 5 (1968).
- [6] A. NAIMARK, *Anneaux normés*. Moscou 1956 (en langue russe).
- [7] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*. Springer 1966.