ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ELISA UDESCHINI BRINIS

**Principio variazionale spinoriale nei campi
gravitazionali einsteiniani**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.3, p. 249–260.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_3_249_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Principio variazionale spinoriale nei campi gravitazionali einsteiniani.* Nota (*) di ELISA UDESCHINI BRINIS, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — In a riemannian space-time, when Einstein gravitational equations for empty space are satisfied, its curvatures are characterized by a totally symmetric four-index spinor: the gravitational spinor. Such a spinor satisfies equations which are similar to the spinor equations for a source-free electromagnetic field. Thanks to this analogy, the field equations of the gravitational spinor are here derived from a variational principle.

Nello spazio-tempo riemanniano della relatività generale, usando il formalismo spinoriale di Witten e Penrose [1] [2], il tensore di Riemann può venire espresso mediante due spinori quadrupli: gli spinori di curvatura.

Le equazioni gravitazionali einsteiniane degli spazi vuoti (valide, cioè, esternamente alle masse ed in assenza di altri campi che interagiscano con quello gravitazionale) esprimono, come ha mostrato Penrose [2], l'annullarsi di uno dei due spinori di curvatura ed impongono la completa simmetria dell'altro. Quest'ultimo viene detto *spinore gravitazionale* ed obbedisce ad equazioni spinoriali formalmente simili a quelle spinoriali del *campo elettromagnetico* neutro, nel vuoto (caratterizzato da uno spinore doppio simmetrico).

Si stabilisce così una suggestiva analogia [2] [3] fra il campo dello spinore gravitazionale (quadruplo) negli spazi vuoti ed il campo dello spinore elettromagnetico (doppio) nel vuoto, in assenza di cariche e correnti.

Grazie a questa analogia, deduco, in questo lavoro, le equazioni spinoriali del Penrose da un principio variazionale, come in altro lavoro [4] [5] avevo dedotto quelle del campo elettromagnetico.

Considero, in uno spazio riemanniano ove siano soddisfatte le equazioni gravitazionali einsteiniane degli spazi vuoti, gli spinori quadrupli simmetrici esprimibili mediante le derivate prime spinoriali di uno spinore potenziale (pure quadruplo, con uno dei quattro indici « puntato » e simmetrico rispetto agli altri tre).

Mostro che, fra tutti gli spinori quadrupli simmetrici deducibili da un potenziale, quello per cui — a parità di valori al contorno dello spinore potenziale e del suo complesso coniugato — risulta stazionaria l'azione costruita mediante una densità lagrangiana funzione quadratica dello spinore quadruplo e del suo coniugato, si identifica con lo spinore gravitazionale.

Anche nella deduzione variazionale delle equazioni di campo, come nelle equazioni stesse, si ha un perfetto parallelismo fra il campo elettromagnetico neutro nel vuoto ed il campo gravitazionale negli spazi vuoti.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1969.

Al di là dell'aspetto formale, l'analogia fra i due campi può essere di aiuto per indagare sulla natura fisica dell'uno e dell'altro; questioni attinenti il campo gravitazionale possono essere affrontate prendendo spunto dalla teoria del campo elettromagnetico.

1. - *Il tensore di Riemann e i due spinori ad esso equivalenti.*

Nello spazio-tempo riemanniano della relatività generale, si può usare un formalismo spinoriale, invece di quello usuale tensoriale.

Mediante lo spin-tensore fondamentale (*) σ_{μ}^{AB} (1) definito, in ciascun punto dello spazio-tempo, dalle:

$$(1-1) \quad \sigma_{\mu A}^B \sigma_{\nu}^{AC} + \sigma_{\nu A}^B \sigma_{\mu}^{AC} = g_{\mu\nu} \epsilon^{BC}$$

(essendo $g_{\mu\nu}$ il tensore fondamentale dello spazio-tempo riemanniano ed ϵ^{BC} lo spinore doppio emisimmetrico fondamentale dello spazio complesso bidimensionale di spin: $\epsilon_{BC} = \epsilon^{BC} = \epsilon_{\mathbf{BC}} = \epsilon^{\mathbf{BC}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, che permette di alzare ed abbassare gli indici spinoriali secondo le: $\varphi_A = \epsilon_{BA} \varphi^B$; $\varphi^A = \epsilon^{AB} \varphi_B$) si stabilisce una corrispondenza fra tensori e spinori a due componenti [6][7][8].

A ciascun indice tensoriale viene a corrispondere una coppia di indici spinoriali, uno puntato ed uno non puntato, secondo le:

$$(1-2) \quad V_{RS} = \sigma_{RS}^{\alpha} V_{\alpha} \quad ; \quad V_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^{RS} V_{RS}$$

$$(1-3) \quad F_{ABCD} = \sigma_{AB}^{\mu} \sigma_{CD}^{\nu} F_{\mu\nu} \quad ; \quad F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu}^{AB} \sigma_{\nu}^{CD} F_{ABCD}$$

e così via.

Oltre a questa semplice corrispondenza spinori-tensori, vi sono speciali corrispondenze fra spinori e tensori sotto opportune restrizioni di simmetria.

Così ad un tensore doppio emisimmetrico reale $F_{\mu\nu}$ si può far corrispondere uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB} . Lo spinore equivalente ad $F_{\mu\nu}$ si può

(*) Per ragioni tipografiche gli indici puntati sono sostituiti con indici in grassetto.

(1) Per ogni valore di μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) σ_{μ}^{AB} rappresenta una matrice (2×2) Hermitiana: $\bar{\sigma}_{\mu}^{AB} = \sigma_{\mu}^{BA}$ (la soprallineatura indica il complesso coniugato) e si comporta come un vettore rispetto all'indice μ e come uno spinore rispetto a ciascun indice A, B ($A, B = 1, 2$).

Consideriamo spinori definiti soltanto rispetto a trasformazioni spinoriali unimodulari.

Gli indici minuscoli greci assumono sempre i valori $0, 1, 2, 3$, mentre quelli maiuscoli latini assumono i valori $1, 2$. Gli indici « puntati » si riferiscono allo spazio di spin complesso coniugato: il passaggio al complesso coniugato cambia cioè gli indici spinoriali puntati in indici non puntati e viceversa.

infatti scrivere:

$$(I-4) \quad F_{ABCD} = \frac{1}{2} (\Phi_{AC} \varepsilon_{BD} + \Phi_{BD} \varepsilon_{AC})$$

dove Φ_{AB} è uno spinore simmetrico definito univocamente (2).

Analogamente, per lo spinore equivalente al tensore quadruplo di Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, reale ed emisimmetrico rispetto agli indici di ciascuna delle due coppie $\mu\nu$ e $\rho\sigma$, si ha [1]:

$$(I-5) \quad R_{EAFBGCHD} = \frac{1}{2} (\Psi_{ABCD} \varepsilon_{EF} \varepsilon_{GH} + \Phi_{ABGH} \varepsilon_{EF} \varepsilon_{CD} + \\ + \Phi_{EFCD} \varepsilon_{AB} \varepsilon_{GH} + \Psi_{EFGH} \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD})$$

dove i due spinori quadrupli Ψ_{ABCD} e Φ_{ABGH} sono univocamente definiti.

Al tensore quadruplo di Riemann vengono così a corrispondere due spinori quadrupli: gli spinori di curvatura.

Le note proprietà di simmetria del tensore di Riemann: $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$, comportano per gli spinori di curvatura le seguenti:

$$(I-6) \quad \Psi_{ABCD} = \Psi_{BACD} = \Psi_{ABDC} = \Psi_{CDAB}$$

$$(I-7) \quad \Phi_{ABCD} = \Phi_{BACD} = \Phi_{ABDC} = \Phi_{CDAB}$$

mentre la proprietà ciclica: $R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0$, porta per lo spinore Ψ_{ABCD} alla condizione:

$$(I-8) \quad \Psi_{ABC}{}^B = \lambda \varepsilon_{AC}$$

dove λ è reale e dato da:

$$\lambda = \frac{1}{2} \Psi_{AB}{}^{AB} = \frac{1}{2} \Psi_{AB}{}^{\overline{AB}}.$$

Al tensore di Riemann contratto (o tensore di Ricci) $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\delta\beta} g^{\gamma\delta}$ corrisponde allora lo spinore:

$$(I-9) \quad R_{ABCD} = \lambda \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} - \Phi_{BDAC}.$$

e l'invariante scalare di curvatura R risulta uguale a 4λ .

Poiché il tensore di Riemann soddisfa le identità del Bianchi:

$$(I-10) \quad R_{\mu\nu\rho\sigma/\tau} + R_{\mu\nu\sigma\tau/\rho} + R_{\mu\nu\tau\rho/\sigma} = 0$$

(2) La corrispondenza fra $F_{\mu\nu}$ e Φ_{AB} si può esprimere direttamente mediante le relazioni [9] [4]:

$$F_{\mu\nu} = S_{\mu\nu AB} \Phi^{AB} + \bar{S}_{\mu\nu AB} \bar{\Phi}^{AB} \quad ; \quad \Phi_{AB} = \frac{1}{8} S_{\mu\nu AB} F^{\mu\nu}$$

essendo $S_{\mu\nu AB}$ lo spin-tensore, emisimmetrico rispetto agli indici tensoriali e simmetrico rispetto a quelli spinoriali, definito da:

$$S_{\mu\nu AB} = \sigma_{\mu}{}^C{}_A \sigma_{\nu CB} - \sigma_{\nu}{}^C{}_A \sigma_{\mu CB}.$$

gli spinori di curvatura, oltre a verificare le relazioni algebriche (1-6), (1-7), (1-8) (stabilite da Witten [1]) sono legati dalle relazioni differenziali (3):

$$(1-11) \quad \Psi_{ABCD}/G^D = \Phi_{ABGH}/H_C$$

e complessa coniugata [2], equivalenti alle (1-10).

Gli spinori di curvatura entrano, naturalmente, nelle formule di commutazione delle derivate seconde covarianti degli spinori. Ci basta qui riportare le relazioni (deducibili dalle formule di commutazione [2]):

$$(1-12) \quad \xi_Q/F^A{}_B - \xi_Q/F^B{}_A = \Psi_{ABQC} \xi^C$$

$$(1-13) \quad \xi_Q/CED^E - \xi_Q/D^E{}_{CE} = \Phi_{QACD} \xi^A$$

valide, accanto alle complesse coniugate, per uno spinore semplice ξ_Q e facilmente estendibili agli spinori multipli.

2. - Lo spinore gravitazionale dello spazio-tempo vuoto.

La corrispondenza fra il tensore di Riemann e i due spinori quadrupli di curvatura permette di scrivere le equazioni gravitazionali einsteiniane relative a regioni spazio-temporali vuote:

$$(2-1) \quad G_{\mu\nu} = 0$$

(essendo $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ il tensore di Levi-Civita Einstein) nella equivalente forma spinoriale:

$$(2-2) \quad \begin{cases} \Phi_{ABCD} = 0 \\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Le equazioni gravitazionali (2-2) impongono che uno dei due spinori di curvatura sia nullo e l'altro sia completamente simmetrico rispetto a tutti gli indici. (La (1-8), per $\lambda = 0$, esprime la simmetria di Ψ_{ABCD} rispetto agli indici B e D; tenuto conto delle (1-6), segue la simmetria rispetto a tutti gli indici).

Le curvature di uno spazio-tempo riemanniano ove siano soddisfatte le equazioni gravitazionali per gli spazi vuoti, sono allora completamente

(3) La barra è simbolo di derivazione covariante. Anche per gli indici di derivazione covariante di una quantità spin-tensoriale vale la usuale corrispondenza:

$$\varphi \dots /AB = \varphi \dots /_{\mu} \sigma^{\mu}{}_{AB}.$$

La derivazione covariante degli spinori viene definita introducendo una connessione spinoriale $\Gamma^A{}_{B\mu}$, che può essere espressa esplicitamente in funzione dello spin-tensore fondamentale $\sigma_{\mu}{}^{AB}$ e delle sue derivate ordinarie imponendo l'annullarsi delle derivate covarianti di $\sigma_{\mu}{}^{AB}$, di ϵ_{AB} e di ϵ^{AB} [10].

individuata da un solo spinore quadruplo Ψ_{ABCD} completamente simmetrico; esso viene chiamato [2] spinore gravitazionale (4).

Tale spinore soddisfa le relazioni differenziali del primo ordine ottenute dalle identità del Bianchi (1-11) e complessa coniugata, ponendo $\Phi_{ABCD} = 0$ e cioè:

$$(2-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{ABCD}/^{ED} = 0 \\ \Psi_{ABCD}/^{DE} = 0. \end{array} \right.$$

Riguardo alle (2-3) mi sembra utile e significativa una precisazione.

Le identità del Bianchi (1-10) rappresentano le condizioni di integrabilità delle equazioni che legano il tensore di curvatura ai coefficienti di connessione [11] e pertanto caratterizzano il tensore di curvatura fra tutti quelli che godono delle stesse simmetrie.

Allo stesso modo, le (2-3) caratterizzano lo spinore di curvatura Ψ_{ABCD} (quadruplo, completamente simmetrico) di uno spazio di Einstein ove sono soddisfatte le equazioni (2-2), nel senso che uno spinore quadruplo completamente simmetrico che le soddisfi coincide ivi con lo spinore di curvatura.

Convenendo quindi, secondo il Penrose, di assumere a rappresentare il campo gravitazionale in uno spazio vuoto di Einstein uno spinore quadruplo completamente simmetrico (lo spinore gravitazionale), se lo si identifica con lo spinore di curvatura le (2-3) costituiscono delle identità, se invece lo si ritiene a priori indipendente dalla curvatura (pur godendo di tutte le simmetrie dello spinore di curvatura), le (2-3) rappresentano le equazioni di campo e impongono che lo spinore gravitazionale si identifichi con lo spinore di curvatura.

3. - Analogia fra campo dello spinore gravitazionale e campo elettromagnetico.

Il formalismo spinoriale mette in evidenza in modo sorprendente, come rileva il Penrose [3], le analogie che sussistono fra il campo gravitazionale einsteiniano nelle regioni vuote ed il campo elettromagnetico neutro nel vuoto.

Detto, infatti, Φ_{AB} lo spinore doppio simmetrico corrispondente al tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ (emisimmetrico, reale) secondo le (1-4), le equazioni del campo elettromagnetico neutro, nel vuoto, in forma spinoriale si scrivono:

$$(3-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{CD}/^{ED} = 0 \\ \Phi_{CD}/^{DE} = 0 \end{array} \right.$$

(4) Anche in presenza di materia, con $\Phi_{ABCD} \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, si può definire uno spinore gravitazionale $W_{ABCD} = \Psi_{ABCD} - \frac{\lambda}{3}(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC})$ che rappresenta la parte completamente simmetrica di Ψ_{ABCD} e risulta in corrispondenza biunivoca con il tensore di Weyl. Nel caso di spazio vuoto, il tensore di Weyl si identifica con il tensore di Riemann.

e risultano formalmente simili alle (2-3) (si ha lo scambio di uno spinore quadruplo con uno spinore doppio).

Così pure, come lo spinore $\Phi_{AB} \Phi_{CD}$ (a divergenza spinoriale nulla) è il corrispondente (a meno di un fattore numerico) del tensore energetico totale elettromagnetico $E_{\nu\sigma}$ (doppio simmetrico), lo spinore $\Psi_{ABCD} \Psi^{EFGH}$ (a divergenza spinoriale nulla) è il corrispondente (a meno di un fattore numerico) del tensore superenergia di Robinson-Bel $T_{\nu\mu\sigma}$ (quadruplo, simmetrico rispetto a tutti gli indici).

Una così stretta analogia, che già risulta evidente da questi pochi richiami, suggerisce di stabilire per le equazioni gravitazionali (2-3) una deduzione variazionale simile a quella che ho dimostrato sussistere per le equazioni elettromagnetiche (3-1).

In un precedente lavoro [4], operando nello spazio-tempo pseudoeuclideo ⁽⁵⁾ ho dedotto le equazioni spinoriali di Maxwell da un principio di azione stazionaria, facendo dipendere lo spinore elettromagnetico da uno spinore potenziale mediante una relazione che costituisce l'estensione agli spinori doppi simmetrici del teorema di Clebsch.

Tale relazione è espressa da:

$$(3-2) \quad \Phi_{CD} = \frac{1}{8} (\chi_{RD}/{}^R C + \chi_{RC}/{}^R D)$$

e al potenziale χ_{RC} si può imporre la condizione di solenoidalità:

$$(3-3) \quad \chi_{RC}/{}^R C = 0$$

per la quale la (3-2) si riduce a:

$$(3-4) \quad \Phi_{CD} = \frac{1}{4} \chi_{RD}/{}^R C.$$

Assumendo come densità lagrangiana la:

$$(3-5) \quad \mathcal{L} = 2 (\Phi_{AB} \Phi^{AB} + \bar{\Phi}_{AB} \bar{\Phi}^{AB})$$

ed imponendo la stazionarietà dell'azione $\int_{\tau} \mathcal{L} d\tau$ (essendo τ una qualunque regione spazio-temporale) in corrispondenza ad una variazione arbitraria dello spinore potenziale e del coniugato, a parità di valori al contorno, ho dimostrato che si ottengono le equazioni elettromagnetiche (3-1).

Ciò è conforme a quanto avviene nell'ambito tensoriale [12] ove, però, il tensore elettromagnetico dipende, a priori, da due potenziali vettori spazio-temporali.

(5) Tutti i risultati, però, si possono estendere senza difficoltà ad uno spazio-tempo riemanniano.

4. - *Spinori quadrupli simmetrici dedotti da uno spinore potenziale.*

Osserviamo che, dato un qualunque spinore quadruplo η_{ABRD} (con un indice puntato e completamente simmetrico rispetto ai tre indici non puntati), mediante le sue derivate spinoriali si può sempre costruire uno spinore quadruplo completamente simmetrico χ_{ABCD} , secondo le: .

$$(4-1) \quad \chi_{ABCD} = \eta_{ABRD}/^R_C + \eta_{ABRC}/^R_D + \eta_{ACRD}/^R_B + \eta_{CBRD}/^R_A.$$

Lo spinore η_{ABRD} si potrà considerare il *potenziale* del campo dello spinore χ_{ABCD} ⁽⁶⁾, come, del resto, lo spinore χ_{RD} nelle (3-2) relative al campo elettromagnetico.

Accanto alla (4-1) sussiste anche la complessa coniugata che mostra come con lo spinore $\bar{\eta}_{ABRD} \equiv \eta_{ABRD}$ (complesso coniugato di η_{ABRD}), simmetrico nei tre indici puntati, si possa costruire lo spinore $\bar{\chi}_{ABCD} \equiv \chi_{ABCD}$ (complesso coniugato di χ_{ABCD}).

La (4-1) si può anche trasformare in modo da far comparire le divergenze spinoriali dello spinore η_{ABRD} .

Poiché, difatti, ogni coppia di indici spinoriali di emisimmetria può essere messa in evidenza come uno spinore ε , si può porre:

$$(4-2) \quad \eta_{ABRD}/^R_C - \eta_{ABRC}/^R_D = \vartheta_{AB} \varepsilon_{CD}$$

essendo ϑ_{AB} uno spinore doppio simmetrico.

Saturando ambo i membri di (4-2) con ε^{CD} , si ottiene:

$$\eta_{ABR}^C/^R_C - \eta_{ABRC}/^RC = 2 \vartheta_{AB}$$

e quindi:

$$\eta_{ABRC}/^RC = -\vartheta_{AB}.$$

La (4-2) dà pertanto:

$$(4-3) \quad \eta_{ABRC}/^R_D = \eta_{ABRD}/^R_C + \varepsilon_{CD} \eta_{ABRE}/^RE.$$

Operando analogamente per gli altri termini a secondo membro della (4-1), questa si può scrivere:

$$(4-1') \quad \chi_{ABCD} = 4 \eta_{ABRD}/^R_C + \varepsilon_{CD} \eta_{ABRE}/^RE + \varepsilon_{CB} \eta_{ADRE}/^RE + \varepsilon_{CA} \eta_{BDRE}/^RE.$$

(6) Ovviamente ci si riferisce a spinori funzioni regolari dei punti dello spazio-tempo.

Come già avviene nel caso degli spinori doppi, ci troviamo di fronte ad un « potenziale » che ha un numero di componenti superiore a quello delle componenti del campo (precisamente, otto complesse per η_{ABRD} contro cinque complesse per χ_{ABCD}).

Se, in particolare, si considera uno spinore potenziale η_{ABRD} avente le tre divergenze spinoriali nulle (e quindi soltanto cinque componenti indipendenti):

$$(4-4) \quad \eta_{ABRE}/{}^{\mathbf{R}E} = 0$$

la (4-1) si riduce allora a:

$$(4-5) \quad \chi_{ABCD} = 4 \eta_{ABRD}/{}^{\mathbf{R}}_C.$$

In tal modo, avendo imposto allo spinore potenziale le tre condizioni di solenoidalità (4-4), tante sono le componenti dello spinore quadruplo potenziale η_{ABRD} , quante quelle dello spinore χ_{ABCD} .

Al variare arbitrariamente dello spinore quadruplo potenziale η_{ABRD} , le (4-1) definiscono una famiglia di spinori quadrupli simmetrici χ_{ABCD} .

5. - *Deduzione variazionale delle equazioni di campo dello spinore gravitazionale.*

Consideriamo, in uno spazio-tempo riemanniano ove siano soddisfatte le equazioni gravitazionali degli spazi vuoti (2-2), gli spinori quadrupli completamente simmetrici χ_{ABCD} deducibili da un potenziale secondo le (4-1).

Dimostreremo che, fra questi, quello per cui risulta stazionaria, di fronte ad una variazione arbitraria dei potenziali η_{ABRD} , $\bar{\eta}_{ABRD}$ che ne rispetti i valori al contorno, l'azione $\int_{\tau} \Omega \sqrt{-g} dx$ (essendo: g il determinante della metrica; $dx = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$; τ una regione qualsivoglia dello spazio-tempo), con la densità Lagrangiana Ω così espressa:

$$(5-1) \quad \Omega = \chi_{ABCD} \chi^{ABCD} + \bar{\chi}_{ABCD} \bar{\chi}^{ABCD},$$

è lo spinore gravitazionale.

Si ha difatti, per le (4-1) e complessa coniugata, :

$$\begin{aligned} \delta \int_{\tau} \Omega d\tau &= \int_{\tau} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \chi_{ABCD}} \delta \chi_{ABCD} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\chi}_{ABCD}} \delta \bar{\chi}_{ABCD} \right] d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \chi_{ABCD}} (\delta \eta_{ABRD}/{}^{\mathbf{R}}_C + \delta \eta_{ABRC}/{}^{\mathbf{R}}_D + \delta \eta_{ACRD}/{}^{\mathbf{R}}_B + \delta \eta_{CBRD}/{}^{\mathbf{R}}_A) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\chi}_{ABCD}} (\delta \eta_{ABRD}/{}^{\mathbf{R}}_C + \delta \eta_{ABRC}/{}^{\mathbf{R}}_D + \delta \eta_{ACRD}/{}^{\mathbf{R}}_B + \delta \eta_{CBRD}/{}^{\mathbf{R}}_A) \right] d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \chi_{ABCD}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\chi}_{ABDC}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_{ACBD}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\chi}_{CBAD}} \right) \delta \eta_{ABRD}/{}^{\mathbf{R}}_C + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \chi_{ABCD}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\chi}_{ABDC}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_{ACBD}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\chi}_{CBAD}} \right) \delta \eta_{ABRD}/{}^{\mathbf{R}}_C \right] d\tau \end{aligned}$$

e, tenendo conto della (5-1) e della simmetria di χ_{ABCD} :

$$\begin{aligned} \delta \int_{\tau} \Omega d\tau &= 8 \int_{\tau} \left[\chi^{ABCD} \delta \eta_{ABRD} /_{\mathbf{R} \mathbf{C}} + \chi^{ABCD} \delta \eta_{ABRD} /_{\mathbf{C} \mathbf{R}} \right] d\tau = \\ &= 8 \int_{\tau} \left[\chi^{ABCD} \delta \eta_{ABRD} \sigma^{\alpha \mathbf{R}} /_{\mathbf{C}} \right]_{/\alpha} \sqrt{-g} dx + \\ &+ 8 \int_{\tau} \left[\chi^{ABCD} \delta \eta_{ABRD} \sigma^{\alpha \mathbf{R}} /_{\mathbf{C}} \right]_{/\alpha} \sqrt{-g} dx + \\ &- 8 \int_{\tau} \chi^{ABCD} /_{\mathbf{R} \mathbf{C}} \delta \eta_{ABRD} \sqrt{-g} dx + \\ &- 8 \int_{\tau} \chi^{ABCD} /_{\mathbf{C} \mathbf{R}} \delta \eta_{ABRD} \sqrt{-g} dx. \end{aligned}$$

Ricordando che, per un vettore V^{α} , vale la relazione:

$$(5-2) \quad \sqrt{-g} V^{\alpha} /_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} V^{\alpha})$$

si può usare il teorema di Gauss (in condizioni di regolarità) per trasformare i due primi integrali in integrali ipersuperficiali che si annullano per l'annullarsi delle variazioni dei potenziali al contorno.

Si ha quindi:

$$(5-3) \quad \delta \int_{\tau} \Omega d\tau = -8 \int_{\tau} \left[\chi^{ABCD} /_{\mathbf{R} \mathbf{C}} \delta \eta_{ABRD} + \chi^{ABCD} /_{\mathbf{C} \mathbf{R}} \delta \eta_{ABRD} \right] d\tau$$

e imponendo:

$$(5-4) \quad \delta \int_{\tau} \Omega d\tau = 0$$

qualunque siano, entro τ , le variazioni indipendenti $\delta \eta_{ABRD}$ e $\delta \eta_{ABRD}$, si ottengono le equazioni di campo:

$$(5-5) \quad \begin{cases} \chi^{ABCD} /_{\mathbf{R} \mathbf{C}} = 0 \\ \chi^{ABCD} /_{\mathbf{C} \mathbf{R}} = 0 \end{cases}$$

che coincidono con le (2-3).

Ma le equazioni (2-3), come si è osservato al paragrafo 2, in uno spazio riemanniano ove siano soddisfatte le (2-2), caratterizzano lo spinore di curvatura. Si può quindi concludere che: fra tutti gli spinori quadrupli simmetrici deducibili da un potenziale (che resta invariato al contorno), quello per cui risulta verificato il principio variazionale (5-4), con Ω data dalle (5-1), si identifica con lo spinore di curvatura, ossia è lo spinore gravitazionale.

Resta ad un tempo dimostrato che lo spinore di curvatura (lo spinore gravitazionale) è deducibile da un unico spinore potenziale secondo le (4-1).

Si ripete qui quanto avviene per lo spinore elettromagnetico. Come quest'ultimo (doppio simmetrico) si può far dipendere mediante le (3-2) da un solo potenziale spinore (doppio, con un indice puntato), così lo spinore gravitazionale (quadruplo simmetrico) si può far dipendere mediante le (4-1) da un solo potenziale spinore (quadruplo, con un indice puntato).

Osserviamo anche che la densità lagrangiana (5-1) è costruita con lo spinore quadruplo simmetrico χ_{ABCD} allo stesso modo come la densità lagrangiana (3-5) è costruita con lo spinore doppio simmetrico Φ_{AB} .

Potremo esprimere le equazioni di campo (5-5) anche in termini del potenziale η_{ABRD} .

Ricordando la (4-1') e indicando, per brevità, con $-\vartheta_{AB}$ la divergenza $\eta_{ABRC}/{}^{\mathbf{R}C}$, la prima delle (5-5) diventa:

$$4 \eta_{\mathbf{S} C}^{\mathbf{A} B D} / {}^{\mathbf{S} C \mathbf{R}} - \varepsilon^{\mathbf{C} D} \vartheta^{\mathbf{A} B} / {}^{\mathbf{R} C} - \varepsilon^{\mathbf{C} B} \vartheta^{\mathbf{A} D} / {}^{\mathbf{R} C} - \varepsilon^{\mathbf{C} A} \vartheta^{\mathbf{B} D} / {}^{\mathbf{R} C} = 0$$

ossia:

$$(5-6) \quad 4 \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{S} C \mathbf{R}} + 3 \vartheta_{(\mathbf{A} B} / {}^{\mathbf{R} D)} = 0$$

dove le parentesi attorno agli indici denotano simmetrizzazione.

Per le identità:

$$\eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{S} C \mathbf{R}} + \eta_{\mathbf{A} B}^{\mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{R} C} \mathbf{S} C + \eta_{\mathbf{A} B}^{\mathbf{R} D} / {}^{\mathbf{S} C} \mathbf{C} = 0$$

si ha:

$$(5-7) \quad \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{S} C \mathbf{R}} + \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{R} C} \mathbf{S} C = \square \eta_{\mathbf{A} B}^{\mathbf{R} D}.$$

Le formule di commutazione per lo spinore quadruplo $\eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D}$ (corrispondenti alle (1-12), (1-13) e complesse coniugate, valide per uno spinore semplice):

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{T} C \mathbf{R}} - \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{R} C} \mathbf{T} C &= \Phi_{\mathbf{A} Q \mathbf{T} \mathbf{R}} \eta_{\mathbf{B} \mathbf{S} D}^{\mathbf{Q}} + \Phi_{\mathbf{B} Q \mathbf{T} \mathbf{R}} \eta_{\mathbf{A} \mathbf{S} D}^{\mathbf{Q}} + \\ &+ \Phi_{\mathbf{D} Q \mathbf{T} \mathbf{R}} \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S}}^{\mathbf{Q}} + \Psi_{\mathbf{T} \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{V}} \eta_{\mathbf{A} B}^{\mathbf{V} D} \end{aligned}$$

si riducono, in uno spazio ove sono soddisfatte le (2-2), alle:

$$\eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{T} C \mathbf{R}} - \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{R} C} \mathbf{T} C = \Psi_{\mathbf{T} \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{V}} \eta_{\mathbf{A} B}^{\mathbf{V} D}.$$

Per la simmetria di $\Psi_{\mathbf{A} B C D}$, si ha poi:

$$(5-8) \quad \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{S} C} \mathbf{R} C - \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{R} C} \mathbf{S} C = 0$$

cosicché le (5-7) danno:

$$(5-9) \quad 2 \eta_{\mathbf{A} B \mathbf{S} D} / {}^{\mathbf{S} C} \mathbf{R} C = \square \eta_{\mathbf{A} B}^{\mathbf{R} D}.$$

In virtù delle (5-9), le (5-6) diventano:

$$(5-10) \quad 2 \square \eta_{\mathbf{A} B}^{\mathbf{R} D} + 3 \vartheta_{(\mathbf{A} B} / {}^{\mathbf{R} D)} = 0.$$

Il potenziale dello spinore gravitazionale, quando gli si impongano le tre condizioni di solenoidalità (4-4), soddisfa pertanto all'equazione delle onde:

$$(5-11) \quad \square \eta_{AB}{}^R{}_D = 0.$$

Non soddisfa invece all'equazione delle onde lo spinore gravitazionale (7). Dalle (2-3) si ottiene infatti per Ψ_{ABCD} [2]:

$$(5-12) \quad \square \Psi_{ABCD} = 3 \Psi_{(AB}{}^{EF} \Psi_{CD)EF}.$$

Il principio variazionale spinoriale qui stabilito fornisce le equazioni cui obbedisce lo spinore gravitazionale in uno spazio-tempo ove siano verificate le equazioni einsteiniane degli spazi vuoti (2-2) e pertanto si differenzia nettamente da quello [13] che fornisce le equazioni gravitazionali spinoriali (2-2) e che (valendosi di una densità lagrangiana costruita con l'invariante lineare di curvatura) costituisce l'equivalente spinoriale del classico principio variazionale di Einstein. Mentre il primo si ricollega alla rappresentazione del campo gravitazionale (secondo l'impostazione di Witten [1] e Penrose [2]) mediante quantità puramente spinoriali, il secondo è consono alla trattazione di Weyl [14], Infeld e van der Waerden [6], Bergmann [8], nella quale le variabili base atte a descrivere il campo sono quantità spin-tensoriali.

L'algoritmo spinoriale in relatività generale ha assunto negli ultimi anni notevole importanza, essendo particolarmente adatto alla trattazione di problemi inerenti il microcosmo, quali l'interazione fra il campo gravitazionale ed altri campi e la quantizzazione della teoria gravitazionale.

Vorrei infine sottolineare che la conoscenza di principi variazionali che reggono campi fisici spazio-temporali può sempre essere proficua, perché essi, oltre a fornire le equazioni differenziali (certamente compatibili e soddisfacenti al principio di relatività generale) caratteristiche della teoria che si considera, hanno anche l'importante ruolo di servire come base per estensioni della teoria stessa; ne costituiscono anzi il segreto.

Basta pensare, ad esempio, alle teorie relativistiche unitarie di Einstein [15] e di Kaluza [16] nelle quali – generalizzato opportunamente lo spazio-tempo in cui si opera – le equazioni di campo scaturiscono ancora dallo stesso principio variazionale einsteiniano che regge il campo gravitazionale nello spazio-tempo quadrimensionale riemanniano. Basta pensare al campo mesonico (e alle sue estensioni) ottenuto dal principio variazionale che regge il campo elettromagnetico generalizzandone la densità lagrangiana [17].

(7) La stessa cosa si verifica per il campo e per il potenziale elettromagnetico nelle regioni vuote di uno spazio-tempo riemanniano.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] L. WITTEN, *Invariants of General Relativity and the Classification of Spaces*, « Phys. Rev. », **113**, 357 (1959).
- [2] R. PENROSE, *A Spinor Approach to General Relativity*, « Annals of Physics », **10**, 171 (1960).
- [3] R. PENROSE, *General Relativity in Spinor Form*; in: *Les théories relativistes de la gravitation*, C.N.R.S. Paris 1962.
- [4] E. UDESCHINI BRINIS, *Equazioni di campi spinoriali dedotte da un'unica lagrangiana*, Nota I, « Questi Rendiconti », s. VIII, vol. XL, fasc. 4 (1966); Nota II, s. VIII, vol. XL, fasc. 5 (1966).
- [5] E. UDESCHINI BRINIS, *Variational deduction of spinor field equations*, « Meccanica », **2**, 1, march 1967.
- [6] L. INFELD e B. L. VAN DER WAERDEN, *Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie*, « Sitz. Ber. der Preuss Akad. », **9**, 380 (1933).
- [7] W. L. BADE and H. JEHLE, *An introduction to Spinors*, « Revs. Modern Phys. », **25**, 714 (1953).
- [8] P. G. BERGMANN, *Two-Component Spinors in General Relativity*, « Phys. Rev. », **107**, 2 (1956).
- [9] E. M. CORSON, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave-Equations*, Blackie & Son Ltd., London and Glasgow 1955.
- [10] H. S. RUSE, *On the Geometry of Dirac's Equations and their Expression in Tensor Form*, « Proc. Roy. Soc. Edinburgh », **57**, 97 (1937).
- [11] A. LICHNEROWICZ, *Radiations gravitationnelles et électromagnétiques en relativité générale*; in *Vedute e problemi attuali in Relatività Generale*, C.I.M.E., Sestriere, luglio 1958.
- [12] B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*. « Questi Rendiconti », vol. XII, fasc. 4 (1952).
- [13] E. UDESCHINI BRINIS, *Deduzione variazionale delle equazioni gravitazionali spinoriali*. « Annali di matematica ». In corso di stampa.
- [14] H. WEYL, *Elektron und Gravitation*, « I. Zeits. Phys. », **56**, 330 (1929).
- [15] A. EINSTEIN, *Il significato della relatività*, Boringhieri, Torino 1959.
- [16] TH. KALUZA, *Zum Unitätsproblem der Physik*, « Sitz. Preuss. Ak. Wiss », 966 (1921).
- [17] B. FINZI, *Sopra una estensione dei campi elettromagnetici*. « Questi Rendiconti », vol. XIII, fasc. 5 (1952).