
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIE PAULE MALLIAVIN-BRAMERET

**Une remarque sur la ramification analytique des
anneaux locaux de dimension I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.3, p. 245–248.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_3_245_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *Une remarque sur la ramification analytique des anneaux locaux de dimension 1.* Nota di MARIE PAULE MALLIAVIN-BRAMERET, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Designato come larghezza di un A -modulo M il minimo intero u (eventualmente infinito) tale che, presi comunque $n+1$ elementi di M , uno di essi sia contenuto nel sottomodulo generato dagli altri, si perviene — dopo un'analisi opportuna — ad una condizione necessaria e sufficiente (in cui interviene la larghezza di A , considerato come A -modulo), affinché un dominio locale A di dimensione 1 ed avente caratteristiche uguali risulti *analiticamente non ramificato*, ossia affinché il relativo completo $\hat{A}$ sia ridotto.

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires. On notera $m(A)$ l'idéal maximal d'un anneau local A . Un anneau local A' repose sur un anneau local A si $A \subseteq A'$ et si $m(A) = A \cap m(A')$. On dira que des éléments (resp. des sous-modules) d'un A -module M sont *comparables dans leur ensemble* si l'un d'entre eux est contenu dans le sous-module engendré par les autres. La *largeur* de M est le plus petit entier n (ou $+\infty$ si un tel entier n'existe pas) tel que $n+1$ éléments (resp. sous-modules) de M soient toujours comparables dans leur ensemble; on notera $\text{larg}_A M$ ce nombre. La largeur d'un anneau A est celle du A -module A (en notation: $\text{larg } A$) (cfr. [1]).

Tous les anneaux considérés dans la suite sont supposés noethériens. On notera $\bar{A}$ la fermeture intégrale d'un domaine A dans son corps des quotients et $\hat{A}$ le complété d'un anneau local A pour la topologie $m(A)$ -adique.

Soient A un domaine local, L son corps des quotients et V un anneau de valuation d'une extension de degré fini H de L . Si la largeur de A est finie, i.e. si la dimension de Krull de A est ≤ 1 (cfr. [1] 1-4-2) la largeur du A -module V est finie; en effet, H est un L -espace vectoriel de dimension finie; c'est donc, d'après 1-2-12 de [1], un A -module de largeur finie; par suite V , étant un sous- A -module de H , est de largeur finie. Si, en outre, V repose sur A , $(V/m(V))$ est alors muni de façon naturelle d'une structure de $A/m(A)$ espace vectoriel; la dimension de $V/m(V)$ sur $A/m(A)$ est finie, car la largeur du $A/m(A)$ module $V/m(V)$ est finie (cfr. 1-2-6 de [1]). Nous appellerons le nombre $f = f(V/A) = [V/m(V) : A/m(A)]$ le *degré résiduel de A par rapport à V* ; lorsque A est complet et que V est la fermeture intégrale de A dans L , f coïncide avec le degré résiduel latent de A (cfr. [4] ou [2]). D'autre part, puisque V est un anneau de valuation discrète, il existe un nombre entier $e = e(V/A)$ tel que $m(A)V = m(V)^e$. Nous appellerons e l'*indice de ramification de A par rapport à V* . Lorsque A est intégralement clos dans L , i.e. A est un anneau de valuation de L , soit B la ferme-

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1969.

ture intégrale de A dans H ; supposons que B soit un A -module de type fini et posons $P = m(V) \cap B$; les nombres e et f sont alors respectivement, l'indice de ramification et le degré résiduel de P dans l'extension L/K .

Conservons les hypothèses et les notations précédentes; on a:

LEMME. - La largeur n du A -module V est $> ef$. Si $ef = n$, V est un A -module de type fini. Si $L = H$, la largeur de A est égale à n .

Preuve. - Soient u une uniformisante de V et $x_1, x_2, \dots, x_f$ des éléments de V dont les classes modulo $m(V)$ forment une base de $V/m(V)$ sur $A/m(A)$. On pose $u^0 = 1$. Nous allons montrer qu'il n'existe pas d'entier i compris entre zero et $e-1$, pour lequel un élément $u^i x_j$ ($1 \leq j \leq f$) appartient au sous- A -module de V engendré par Vu^e et par les $Au^s x_t$ ($0 \leq s \leq e-1, 1 \leq t \leq f, s \neq i$ ou $t \neq j$). Il en résultera d'une part, que les fe éléments de V suivants: $u^s x_t$ ($0 \leq s \leq e-1, 1 \leq t \leq f$) sont incomparables dans leur ensemble, ce qui prouvera la première partie du lemme. D'autre part, on en déduit, dans le cas où $ef = n = \text{larg}_A V$, que l'on a nécessairement: $u^e V \in \sum_{\substack{0 \leq i \leq e-1 \\ 1 \leq j \leq f}} Au^i x_j$; d'où, puisque $V = Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_f + Vu = \sum_{\substack{0 \leq i \leq e-1 \\ 1 \leq j \leq f}} Au^i x_j + u^e V$, le A -module V est de type fini. On raisonne par l'absurde; soit k le plus petit entier, $0 \leq k \leq e-1$, tel qu'il existe $j, 1 \leq j \leq f$, pour lequel on a: $u^k x_j \in Vu^e + \sum_{\substack{s \neq k \\ \text{ou } t \neq j}} Au^s x_t$, la somme étant étendue à $s = 0, \dots, e-1$ et $t = 1, \dots, f$. D'après le choix de k , les coefficients des $u^s x_t$, pour $s \leq k-1$, appartiennent à $m(A)$. Puisque $m(A) \subset u^e V$ et que $k \leq e$, on obtient que $x_j \in uV + \sum_{i \neq j} Ax_i$, ce qui contredit le choix des x_i . Si $L = H$, on a, puisque $A \subseteq V$, l'inégalité $\text{larg } A \leq \text{larg}_A V = n$; comme $V \subset L$ et que $\text{larg } A = \text{larg}_A L$ (cfr. [1] 1-2-8), la largeur de A est égale à n .

Un anneau local est dit *analytiquement irréductible* (resp. *analytiquement non ramifié*) si son complété est intègre (resp. réduit).

Si A est un domaine local de dimension 1, le nombre des diviseurs premiers de (0) dans $\bar{A}$ est égal au nombre des idéaux maximaux de l'anneau $\bar{A}$. D'autre part, d'après [4], l'anneau A est analytiquement non ramifié si et seulement si le A -module $\bar{A}$ est de type fini.

PROPOSITION. - Soient A un domaine local de dimension 1, $\bar{A}$ la fermeture intégrale de A . On suppose que $\bar{A}$ est un anneau de valuation et que les caractéristiques du corps des quotients et du corps des restes de A sont les mêmes. Alors A est analytiquement non ramifié si et seulement si la largeur de A est égale à ef où e et f sont respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de A par rapport à $\bar{A}$.

Preuve. - D'après le lemme, la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si A est analytiquement non ramifié, l'anneau $\bar{A}$ est intègre d'après la remarque précédent la proposition. D'autre part, $\text{larg } A = \text{larg } \bar{A}$,

d'après [1], 1-3-4; enfin la fermeture intégrale $\bar{\hat{A}}$ de $\hat{A}$ est le complété de $\bar{A}$ (cfr. [4]). Le degré résiduel de $\hat{A}$ par rapport à $\bar{\hat{A}}$ est égal au degré résiduel de A par rapport à $\bar{A}$, puisque le corps résiduel ne change pas par completion. L'indice de ramification de $\hat{A}$ par rapport à $\bar{\hat{A}}$ est égal à celui de A par rapport à $\bar{A}$, car l'idéal maximal du complété est engendré par celui de l'anneau. On peut donc supposer l'anneau A complet. Soit K un sous-corps de A isomorphe au corps résiduel. Dans un système de générateurs $x_1, x_2, \dots, x_m$ de $m(A)$ il existe un élément, par exemple x_1 , tel que $\bar{A}x_1 \supseteq \bar{A}x_i$ pour $i \neq 1$. Posons $x = x_1$ et soit $C = K((x))$ l'anneau des séries formelles en x sur K . Puisque $\{x\}$ est un système de paramètre de A , le C -module A est de type fini (cfr. Cor. 2 du Th. 24 de [5]). Comme A et C ont même corps résiduel, on a $f(\bar{A}/C) = f(\bar{A}/A)$. D'autre part, on a, d'après le choix de x , les égalités: $m(C) \bar{A} = m(A) \bar{A} = m(\bar{A})^e(\bar{A}/A)$. D'où $e(\bar{A}/C) = e(\bar{A}/A)$. Soit L le corps des quotients de A et de $\bar{A}$; puisque A est entier sur C , $\bar{A}$ est la fermeture intégrale de C dans L . Puisque A est un C -module de type fini, L est une extension de degré fini du corps des quotients $K((x))$ de C , et A est un C -module de type fini. Donc e et f sont l'indice de ramification et le degré résiduel de $m(\bar{A})$ dans l'extension $L/K((x))$, et l'on a $ef = [L : K((x))]$ d'après (Cor. 1 Prop. 3 paragraphe 2 Ch II de [6]). D'après le lemme on a $ef \leq n = \text{larg } A = \text{larg}_A \bar{A}$. D'autre part, on a évidemment $\text{larg } A \leq \text{larg}_C A$. Puisque C est un anneau de valuation, que A est un anneau de Macaulay et est un C -module de type fini, le C -module A est libre (cfr. [3] Ch. III 25-16); donc $\text{larg}_C A$ est le rang de A sur C (cfr. [1] 1-2-13); par suite $\text{larg}_C A = [L : K((x))] = ef$. Des inégalités précédentes il résulte que $ef = n = \text{larg } A$.

Soient A un domaine local de dimension 1, $M_1, M_2, \dots, M_n$ les idéaux maximaux de $\bar{A}$ et $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n = M_1 M_2 \dots M_n = r(\bar{A})$ le radical de $\bar{A}$. Posons pour tout i , $V_i = \bar{A}_{M_i}$; V_i est un anneau de valuation d'idéal maximal $M_i \bar{A}_{M_i}$ et $m(V_i) \cap \bar{A} = M_i$. Donc $m(A) = m(V_i) \cap A = M_i \cap A$. On a donc $f(V_i/A) = [V_i/m(V_i) : A/m(A)] = [\bar{A}/M_i : A/m(A)]$. On posera dans la suite $f_i = f(V_i/A)$. On désignera par e_i l'indice de ramification $e(V_i/A)$ de A par rapport à V_i . Alors $m(A) V_i = m(V_i)^{e_i} = M_i^{e_i} V_i$. D'où $m(A) \bar{A} = M_1^{e_1} M_2^{e_2} \dots M_n^{e_n}$.

THÉORÈME. — Soient A un domaine local de dimension 1 et d'égalité caractéristiques, $\bar{A}$ la fermeture intégrale de A , M_i , $i = 1, \dots, n$, les idéaux maximaux de $\bar{A}$, e_i l'indice de ramification de A par rapport à $\bar{A}_{M_i}$, f_i le degré résiduel de A par rapport à $\bar{A}_{M_i}$, P_i , $i = 1, \dots, n$, les diviseurs premiers de (o) dans le complété $\hat{A}$ de A , $(o) = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ la décomposition de l'idéal (o) de $\hat{A}$ en idéaux P_i -primaires Q_i . Alors on a: $\text{larg } A = \sum_{i=1}^n f_i e_i + \sum_{i=1}^n \text{larg}_{\hat{A}} P_i / Q_i$.

COROLLAIRE. — Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème, l'anneau A est analytiquement non ramifié si et seulement si $\text{larg } A = \sum_{i=1}^n f_i e_i$.

Preuve du théorème. D'après [1], 1-5-7, on a: $\text{larg } A = \sum_{i=1}^n \text{larg } (\hat{A}/P_i) + \sum_{i=1}^n \text{larg}_A (P_i/Q_i)$. D'après [4], il existe une bijection entre l'ensemble des M_i et celui des P_i telle que si, pour $i = 1, \dots, n$, P_i correspond à M_i et si on pose $A_i := \hat{A}/P_i$, alors $\bar{A}_i$ est le complété de $V_i = \bar{A}_{M_i}$. Par suite $f_i = f(\bar{A}_i/A_i)$. Comme $P_i \cap A = (0)$, A_i contient A comme sous-anneau et A est partout dense dans A_i . Comme $m(A_i) = m(\hat{A})/P_i$, on a $m(A_i) \bar{A}_i = m(A) \hat{V}_i = m(V_i)^{e_i} \hat{V}_i = m(\bar{A}_i)^{e_i}$. Donc $e_i = e(\bar{A}_i/A_i)$. Par suite $\text{larg } A_i = e_i f_i$; d'où la formule.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] M. P. MALLIAVIN-BRAMERET, « Bull. Soc. Math. de France, Mémoire », 8 (1966).
- [2] G. MAURY, *Les travaux de Northcott sur les anneaux locaux de dimension 1*, « Séminaire Dubreil-Pisot », 4, 1957-58.
- [3] M. NAGATA, *Local rings*, « Interscience tracts in pure and applied mathematics », 13.
- [4] D. G. NORTHCOTT, *A general theory of one dimensional local rings*, « Proc. Glasgow math. Ass. », t. 2, 159-169 (1954-56).
- [5] P. SAMUEL et O. ZARISKI, *Commutative Algebra*, Vol. II.
- [6] J. P. SERRE, *Corps Locaux*, Hermann, 1962.