Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franco Bocchio

Sui campi di curve superficiali a trasformata geodetica nelle rappresentazioni cartografiche di tipo generale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.2, p. 172–176.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_2_172_0>

Geodesia. — *Sui campi di curve superficiali a trasformata geodetica nelle rappresentazioni cartografiche di tipo generale.* Nota di FRANCO BOCCHIO, presentata (*) dal Corrisp. A. MARUSSI.

SUMMARY. — Fields of surface curves which transform into geodesics when the fields undergo an affine transformation are studied. Some differential and integral properties related to these fields are then considered in the particular case of geodesic, equivalent and conformal mapping.

1. – In un precedente lavoro [1] si sono esaminate alcune proprietà differenziali ed integrali per la curvatura geodetica γ quando si considerino campi di curve superficiali [2], [3], [4] partendo dalla relazione:

$$\gamma = -\operatorname{div} \bar{n} = -\nu^i/_i \tag{1.1}$$

ove ν^i è, in forma controvariante, il versore della normale ad esse. Alla (1.1) può darsi per mezzo delle formule di Green l'espressione integrale

$$\iint_\Sigma \gamma \, d\sigma = \int_L \nu^i \eta_i \, dl \tag{1.2}$$

ove L indica una curva chiusa regolare che racchiude la porzione regolare Σ di superficie entro la quale si considera il campo, ed η_i è, in forma controvariante, il versore della normale a L rivolta verso l'interno di Σ. Quando si considerano, in una rappresentazione affine di Σ su $\bar{\Sigma}$, quei campi di curve di Σ che vengono trasformati in geodetiche di $\bar{\Sigma}$, campi che diremo per questo *a trasformata geodetica*, dalla (1.1) e (1.2) possono dedursi per essi alcune proprietà differenziali e integrali che ora si esamineranno.

2. – La curvatura geodetica $\bar{\gamma}$ della trasformata di una curva di Σ ha, nelle rappresentazioni affini l'espressione, già fornita da Marussi [6]:

$$\bar{\gamma} = \frac{S}{m_t^3} (\gamma + \varepsilon_{ji} T^i_{rs} \lambda^r \lambda^s \lambda^j) \tag{2.1}$$

in cui m_t ed S sono rispettivamente il modulo di deformazione lineare nella direzione della tangente $\bar{t}$, e quello areale della rappresentazione; T^i_{rs} è dato dalla differenza fra i simboli di Christoffel di seconda specie di Σ e $\bar{\Sigma}$ e λ^i è, in forma controvariante, il versore della tangente $\bar{t}$. Se si considerano campi a trasformata geodetica dovrà essere per questi

$$\gamma = -\varepsilon_{ji} T^i_{rs} \lambda^r \lambda^s \lambda^j \tag{2.2}$$

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1969.

da cui, per la (1.1), si ha

$$\nu^i/_i - T^i_{rs}\,\lambda^r\,\lambda^s\,\nu_i = 0 \tag{2.3}$$

che è la cercata equazione differenziale di un campo a trasformata geodetica in una rappresentazione affine. Tenuto conto della (2.3) la (1.2) si potrà scrivere

$$\iint_\Sigma T^i_{rs}\,\lambda^r\,\lambda^s\,\nu_i\,d\sigma = \int_L \nu^i\,\eta_i\,dl \tag{2.4}$$

con η_i rivolto verso l'esterno di Σ.

Si consideri su Σ un sistema doppio ortogonale (u^1, u^2) del quale una delle famiglie coordinate costituisca un campo a trasformata geodetica ed un quadrilatero formato da linee coordinate. Dalla (2.4) si ricavano, a seconda che il campo considerato sia quello delle curve u^1 o delle curve u^2, le relazioni

$$\iint_\Sigma \frac{\sqrt{a_{22}}}{a_{11}}\,T^2_{11}\,d\sigma = \Delta l_1 \tag{2.5}$$

$$\iint_\Sigma \frac{\sqrt{a_{11}}}{a_{22}}\,T^1_{22}\,d\sigma = \Delta l_2 \tag{2.6}$$

essendo Δl_1 e Δl_2 le alterazioni di lunghezza tra i lati opposti del quadrilatero nei casi considerati.

3. – Nel caso delle rappresentazioni geodetiche è identicamente nulla l'alterazione di curvatura geodetica e pertanto la (2.4) si riduce alla

$$\int_L \nu^i\,\eta_i\,dl = 0 \tag{3.1}$$

che esprime il fatto, già messo altrove [1] in evidenza, che è nullo il flusso del versore normale di una famiglia di geodetiche attraverso il contorno L di Σ.

4. – Nelle rappresentazioni equivalenti [6] il tensore T^i_{rs} soddisfa la condizione

$$T^i_{ri} = \sigma_{/r} = 0 \tag{4.1}$$

essendo e^σ il modulo di deformazione areale.

In virtù della (4.1) l'integrando al primo membro della (2.4) può scriversi, nelle rappresentazioni considerate

$$T^i_{rs}\,\lambda^r\,\lambda^s\,\nu_i = \sqrt{a}\,[3\,T^2_{22}\,\lambda^1\,(\lambda^2)^2 - 3\,T^1_{11}\,\lambda^2\,(\lambda^1)^2 + T^2_{11}\,(\lambda^1)^3 - T^1_{22}\,(\lambda^2)^3]. \tag{4.2}$$

5. – Per le rappresentazioni conformi la (2.1) si traduce nel noto teorema di Schols [5]:

$$\bar{\gamma} = e^{-\mu} (\gamma - \mu_{/i} \nu^i) \tag{5.1}$$

in cui $\mu_{/i}$ indica il *gradiente di deformazione* [7]. Per i campi di curve a trasformata geodetica in una rappresentazione conforme si avrà perciò

$$\gamma = \mu_{/i} \nu^i \tag{5.2}$$

ottenendo così la

$$\mu_{/i} \nu^i + \nu^i{}_{/i} = 0 \tag{5.3}$$

che rappresenta l'equazione differenziale di un campo a trasformata geodetica in una rappresentazione conforme. Alla (5.3) può darsi un'espressione particolarmente significativa; tenuto infatti conto della relazione

$$\operatorname{div} \mu\bar{n} = \mu \operatorname{div} \bar{n} + \operatorname{grad} \mu \times \bar{n}$$

si vede facilmente che all'equazione differenziale dei campi considerati può darsi la forma

$$\operatorname{div} \mu\bar{n} = (\mu - 1) \operatorname{div} \bar{n}\,. \tag{5.4}$$

Per le rappresentazioni conformi la relazione integrale (2.4) si traduce nella

$$\iint\limits_{\Sigma} \mu_{/i} \nu^i \, d\sigma = \int\limits_{L} \nu^i \eta_i \, dl \tag{5.5}$$

che nel caso in cui il campo di curve a trasformata geodetica sia costituito da isometre della rappresentazione può scriversi

$$\iint\limits_{\Sigma} |\operatorname{grad} \mu| \, d\sigma = \int\limits_{L} \nu^i \eta_i \, dl. \tag{5.6}$$

La (5.6) esprime la seguente proprietà: *in un campo di curve isomet e a trasformata geodetica in una rappresentazione conforme il modulo integro del gradiente di deformazione uguaglia il flusso della normale attraverso il contorno* L *di* Σ. Quando in luogo di un contorno generico L si scelga un quadrilatero fatto con archi di tali isometre e di linee isomorfe si avrà

$$\iint\limits_{\Sigma} |\operatorname{grad} \mu| \, d\sigma = \Delta l \tag{5.7}$$

ove Δl rappresenta l'alterazione di lunghezza tra gli archi di isometra del contorno. In particolare, se si considerano rappresentazioni di interesse cartografico in cui le isometre siano i paralleli su superfici di rotazione la (5.7) permette di esprimere la differenza di lunghezza tra gli archi di parallelo del contorno mediante il modulo integro, entro il quadrilatero, del gradiente di deformazione.

Se il campo di curve è costituito da isometre chiuse e la curva contorno L è una di queste, la (5.6) si riduce alla

$$\iint_{\Sigma} |\operatorname{grad} \mu| \, d\sigma = l \tag{5.8}$$

ossia, *entro tale regione il modulo integro del gradiente di deformazione è uguale alla lunghezza del contorno di* Σ. Se invece si considera un campo di curve isomorfe a trasformata geodetica, essendo in tal caso $\mu_{/i}\, \nu^i = 0$, dalla (5.6) si ha, per un contorno L costituito da archi di isomorfe e di isometre

$$\Delta l = 0 \tag{5.9}$$

che esprime il fatto che se le isomorfe di Σ si trasformano in geodetiche in una rappresentazione conforme, esse sono di necessità linee geodetiche.

6. – Come applicazione di quanto esposto si può verificare, coi metodi del calcolo tensoriale, che l'equazione differenziale (5.4) dei campi di curve a trasformata geodetica nelle rappresentazioni conformi è soddisfatta da un campo di lossodromiche su una superficie di rotazione [8] nella rappresentazione di Mercatore.

Si consideri una superficie Σ di rotazione il cui asse sia l'asse Oz in un riferimento cartesiano ortogonale unitario x, y, z. Nel piano xz il meridiano di Σ può rappresentarsi con le equazioni parametriche

$$x = \varphi(u) \quad , \quad z = \Psi(u)$$

e per i coefficienti della prima forma fondamentale sulla superficie Σ si ha quindi

$$a_{11} = \varphi'^2(u) + \Psi'^2(u) \quad , \quad a_{22} = \varphi^2(u) \, , \, a_{12} = a_{21} = 0 .$$

Se α indica l'angolo costante formato dalle lossodromiche coi meridiani, il versore normale alle curve del campo è dato da

$$\nu^i \equiv \left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{a_{11}}} \, , - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{a_{22}}} \right) .$$

Poiché per la rappresentazione considerata è

$$\mu = \ln \frac{R}{\varphi(u)} \quad , \quad R = \varphi(0)$$

posto

$$\ln \varphi(u) = \Phi(u) \quad , \quad \ln R = \rho \quad , \quad \rho - 1 = c$$

si vede che è

$$\operatorname{div} \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{a}\, \nu^i \right) = \frac{\Phi'(u)}{\sqrt{a_{11}}} \sin\alpha$$

e inoltre

$$\operatorname{div} \mu\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{a}\, \nu^i \ln \frac{R}{\varphi(u)} \right) = \frac{\Phi'(u) \sin\alpha}{\sqrt{a_{11}}} \left(c - \Phi(u) \right) .$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] BOCCHIO F., *Su alcuni teoremi integrali per la curvatura geodetica e la curvatura media nel caso di campi di curve superficiali e di campi di superfici*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8ª, *45* (5) (1968).
[2] BRAND L., *Vector and tensor Analysis*, John Wiley & Sons, 293, New York 1948.
[3] MC CONNELL A. J., *Applications of the absolute differential calculus*, Blakie & Son, 190 (1947).
[4] EISENHART L. P., *An introduction to differential geometry*, Princeton University Press, 201 (1947).
[5] TAUCER G., *Alcune considerazioni sul teorema di Schols*, « Boll. di Geodesia e Sc. Affini », *2* (1954).
[6] MARUSSI A., *Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superfici*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8ª, *16* (4) (1954).
[7] MARUSSI A., *Su alcune proprietà integrali delle rappresentazioni conformi di superfici su superfici*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8ª, *10* (4) (1951).
[8] LORIA G., *Curve sghembe speciali*, Zanichelli, 180, Bologna 1925.