ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIORGIO FERRARESE

Lavoro delle forze intime e isotropia. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.2, p. 166–171.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_2_166_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Meccanica. — *Lavoro delle forze intime e isotropia*. Nota II di GIORGIO FERRARESE, presentata [(*)] dal Corrisp. C. CATTANEO.

SUMMARY. — Some contributions are made to the study of nonlinear mechanics of continua in general coordinates. In particular, a very simple definition of isotropic media is presented, and two general expressions of the internal work are established, using a nonholonomic frame of reference.

(I paragrafi e le formule che seguono sono numerati in continuazione di quelli della Nota I).

4. LAVORO NOMINALE DELLE FORZE INTIME: *espressioni generali*. – Come è ben noto, le caratteristiche di deformazione ε_{ik} intervengono in modo determinante nell'espressione del lavoro delle forze intime. Precisamente, se si indicano con $\mathbf{Y}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ i vettori caratteristici degli sforzi in C [(6)]:

$$\mathbf{Y}^i = \mathrm{Y}^{ik}\,\mathbf{E}_k \tag{28}$$

si ha, per il lavoro specifico [(7)] delle forze intime, relativo al passaggio da C a C + δC, la seguente espressione:

$$\delta l^{(i)} = \mathfrak{D}\mathrm{Y}^{ik}\,\delta\varepsilon_{ik}\,. \tag{29}$$

Insieme a questa si possono considerare due espressioni miste: quelle che fanno capo alle variabili $\varepsilon_i^{\ k}$, ovvero $\mathcal{E}_i^{\ k}$ (cfr. ad esempio [8] p. 196, nonché [6]). Invero non espressive come la (29), in quanto esprimono il lavoro delle forze intime come una forma differenziale in *nove* variabili, anziché sei, subordinate alle limitazioni (21).

Più significativa, a mio avviso, è invece l'espressione del lavoro delle forze intime che fa intervenire il tensore $\bar{\varepsilon}^{ik}$ di cui alla (26). Precisamente, posto che, per l'invariabilità di C_*, nonché della metrica g_{ik}, si ha successivamente, come dalle (5) e $(4)_2$,

$$\delta l^{(i)} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{D}\mathrm{Y}^{ik}\,\delta\mathrm{G}_{ik} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{D}\mathrm{Y}^{i}{}_{j}\,\mathrm{G}^{jk}\,\delta\mathrm{G}_{ik} = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{D}\mathrm{Y}^{i}{}_{j}\,\mathrm{G}_{ik}\,\delta\mathrm{G}^{jk},$$

basta il richiamo della (26) per trasformare la (29) nella forma seguente:

$$\delta l^{(i)} = -\,\mathfrak{D}\overline{\mathrm{Y}}_{ik}\,\delta\bar{\varepsilon}^{ik}, \tag{30}$$

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1969.

(6) Si vuol dire i trasformati, mediante l'omografia di tensione, dei vettori $\mathbf{E}^i$. Per la generica faccetta di normale $\boldsymbol{n} = n_i\,\mathbf{E}^i$ lo sforzo specifico è rappresentato dal vettore

$$\boldsymbol{\Phi}_n = n_i\,\mathbf{Y}^i = n_i\,\mathrm{Y}^{ik}\,\mathbf{E}_k\,.$$

Si noti che i prodotti $\mathfrak{D}\mathrm{Y}^{ik}$ danno le ordinarie caratteristiche *lagrangiane* di tensione, mentre la decomposizione $\mathbf{Y}^i = \mathrm{K}^{ik}\,\boldsymbol{e}_k$ mette in evidenza, a meno del fattore $\mathfrak{D}$, il tensore di Piola–Kirchhoff.

(7) Riportato all'unità di volume della configurazione di riferimento C_*.

essendo

$$\bar{Y}_{ik} = G_{ij}\, G_{kl}\, Y^{jl} \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3). \tag{31}$$

Si noti che Y^{ik} e $\bar{Y}_{ik}$ *coincidono*, come tensori di C (ma non come tensori di C_*), e si riducono entrambi, in coordinate cartesiane, alle ordinarie caratteristiche *euleriane* di tensione. In ogni caso si ha, insieme alla (31), il legame inverso

$$Y^{ik} = G^{ij}\, G^{kl}\, \bar{Y}_{jl} \qquad (i\,,k = 1,2\,,3), \tag{31'}$$

ovvero esplicitamente, come dalle (5) e (26),

$$\begin{cases} \bar{Y}_{ik} = (g_{ij} + 2\,\varepsilon_{ij})\,(g_{kl} + 2\,\varepsilon_{kl})\, Y^{jl} \\ Y^{ik} = (g^{ij} + 2\,\bar{\varepsilon}^{ij})\,(g^{kl} + 2\,\bar{\varepsilon}^{kl})\, \bar{Y}_{jl} \end{cases} \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3). \tag{32}$$

Insieme alle (29) e (30), che sono, in un certo senso, l'una l'aspetto *duale* dell'altra, si possono stabilire due espressioni del lavoro delle forze intime *del tutto generali.*

A questo scopo, cominciamo col fissare, nel punto generico della configurazione di riferimento C_*, una terna di vettori $\underset{r}{\lambda} \equiv (\underset{r}{\lambda^i})\ (r\,,i = 1\,,2\,,3)$ [8], senza imporre ad essa, per il momento, alcun speciale significato; anzi neppure la condizione di ortonormalità: si tratterà di un *riferimento anolonomo* per C_*, dipendente generalmente da C. Insieme introduciamo la metrica anolonoma $\underset{rs}{g}$:

$$\underset{rs}{g} \equiv \underset{r}{\lambda}\cdot\underset{s}{\lambda} = \underset{r}{\lambda^i}\,\underset{s}{\lambda^k}\, g_{ik} \qquad (r\,,s = 1\,,2\,,3), \tag{33}$$

indicando con $\overset{rs}{g}$ l'elemento reciproco di $\underset{rs}{g}$ nella matrice, regolare, $\|\underset{rs}{g}\|$:

$$\overset{rh}{g}\,\underset{sh}{g} = \delta^r_s. \tag{34}$$

Per i vettori della cobase, $\overset{r}{\lambda} \equiv (\overset{r}{\lambda_i})$:

$$\overset{r}{\lambda_i}\,\underset{s}{\lambda^i} \equiv \overset{r}{\lambda}\cdot\underset{s}{\lambda} = \delta^r_s \qquad (r\,,s = 1\,,2\,,3), \tag{34'}$$

si avrà l'uguaglianza $\overset{r}{\lambda} = \overset{rs}{g}\,\underset{s}{\lambda}$, nonché, in termini di componenti,

$$\overset{r}{\lambda_i} = \overset{rs}{g}\,\underset{s}{\lambda_i} \equiv \overset{rs}{g}\,\underset{s}{\lambda^k}\, g_{ik} \qquad (r\,,i = 1\,,2\,,3). \tag{35}$$

Dopo di ciò, facciamo intervenire le componenti del tensore di deformazione e di quello degli sforzi secondo la base anolonoma considerata, rispet-

(8) Per distinguere un indice tensoriale da un indice ordinale, questi ultimi verranno apposti al di sotto o al di sopra della lettera, anziché a lato.

tivamente $\underset{rs}{\varepsilon}$ e $\overset{rs}{\mathrm{Y}}$. Si avranno i legami

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \overset{r}{\lambda}_i \overset{s}{\lambda}_k \underset{rs}{\varepsilon} \\ \mathrm{Y}^{ik} &= \underset{r}{\lambda^i} \underset{s}{\lambda^k} \overset{rs}{\mathrm{Y}} \end{aligned}\right. \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3), \tag{36}$$

da cui, come dalla (29), tenuto conto delle relazioni di reciprocità (34′), la seguente espressione di $\delta l^{(i)}$:

$$\delta l^{(i)} = \mathfrak{D}\,(\overset{rs}{\mathrm{Y}}\,\delta\underset{rs}{\varepsilon} - 2\,\underset{rs}{\varepsilon}\,\overset{sh}{\mathrm{Y}}\,\overset{r}{\lambda}_i\,\delta\underset{h}{\lambda^i}). \tag{37}$$

Ciò posto, consideriamo il prodotto $\underset{k}{\lambda_i}\,\delta\underset{h}{\lambda^i}$, e spezziamolo nelle due parti, *simmetrica e antisimmetrica*, scriviamo cioè

$$\underset{k}{\lambda_i}\,\delta\underset{h}{\lambda^i} = \frac{1}{2}(\underset{k}{\lambda_i}\,\delta\underset{h}{\lambda^i} + \underset{h}{\lambda_i}\,\delta\underset{k}{\lambda^i}) + \frac{1}{2}\,\delta\underset{kh}{\omega} \qquad (k\,,h = 1\,,2\,,3), \tag{38}$$

essendo $\delta\underset{kh}{\omega}$ la forma differenziale

$$\delta\underset{kh}{\omega} \equiv \underset{k}{\lambda_i}\,\delta\underset{h}{\lambda^i} - \underset{h}{\lambda_i}\,\delta\underset{k}{\lambda^i} \qquad (k\,,h = 1\,,2\,,3). \tag{39}$$

Poiché la metrica g_{ik} è *costante* rispetto alla differenziazione δ, per la parte simmetrica si ha successivamente, come dalla (33),

$$\underset{k}{\lambda_i}\,\delta\underset{h}{\lambda^i} + \underset{h}{\lambda_i}\,\delta\underset{k}{\lambda^i} = \underset{k}{\lambda^i}\,\delta\underset{h}{\lambda_i} + \underset{h}{\lambda_i}\,\delta\underset{k}{\lambda^i} \equiv \delta\,(\underset{k}{\lambda^i}\,\underset{h}{\lambda_i}) = \delta\underset{kh}{g};$$

sì che la (38) non differisce da

$$\underset{k}{\lambda_i}\,\delta\underset{h}{\lambda^i} = \frac{1}{2}(\delta\underset{kh}{g} + \delta\underset{kh}{\omega}) \qquad (k\,,h = 1\,,2\,,3); \tag{38′}$$

ciò che in definitiva, avuto riguardo alla (35), riduce la (37) alla forma seguente:

$$\boxed{\delta l^{(i)} = \mathfrak{D}\,[\overset{rs}{\mathrm{Y}}\,\delta\underset{rs}{\varepsilon} - \underset{rs}{\varepsilon}\,\overset{sh}{\mathrm{Y}}\,\overset{rk}{g}\,(\delta\underset{kh}{g} + \delta\underset{kh}{\omega})]}\,. \tag{40}$$

In parallelo all'espressione (40) se ne ottiene un'altra, del tutto analoga, a partire dalla (30):

$$\boxed{\delta l^{(i)} = -\,\mathfrak{D}\,[\underset{rs}{\bar{\mathrm{Y}}}\,\delta\overset{rs}{\bar{\varepsilon}} + \overset{rs}{\bar{\varepsilon}}\,\underset{sh}{\bar{\mathrm{Y}}}\,\overset{hk}{g}\,(\delta\underset{kr}{g} + \delta\underset{kr}{\omega})]}\,. \tag{41}$$

Le espressioni trovate per il lavoro delle forze intime, *del tutto generali*, non sono subordinate ad alcuna particolare scelta del riferimento anolonomo $\{\underset{r}{\lambda}\}$. È chiaro che esse si semplificano se si specializza il riferimento supponendo che i vettori $\underset{r}{\lambda}$ costituiscano una base ortonormale, ad esempio, come verrà fatto appresso, la terna principale di deformazione relativa a $C_* \to C$.

In ogni caso si noti esplicitamente che, posto

$$\delta\omega \equiv \frac{1}{2} \underset{r}{\lambda} \wedge \delta \overset{r}{\lambda} = \frac{1}{2} \overset{r}{\lambda} \wedge \delta \underset{r}{\lambda}, \tag{42}$$

si ha in generale, come dai legami $\underset{r}{\lambda} = \underset{r}{\lambda_i}\, \boldsymbol{e}^i$, $\overset{r}{\lambda} = \overset{r}{\lambda_i}\, \boldsymbol{e}^i$, la seguente uguaglianza:

$$\delta\omega = -\frac{1}{4}\, \delta \omega_{hk} \overset{h}{\lambda} \wedge \overset{k}{\lambda}\,; \tag{43}$$

ciò che precisa, come già per i riferimenti ortonormali (cfr. [9] p. 127), il significato delle quantità antisimmetriche (39).

Per un sistema a trasformazioni reversibili (9), di potenziale termodinamico specifico (10) (energia libera) $\mathfrak{F}$: $\delta l^{(i)} \equiv -\delta\mathfrak{F}$ (differenziale esatto), in base alla (29) si hanno i noti legami stress–strain

$$\mathfrak{D}\mathrm{Y}^{ik} = -\frac{\partial \mathfrak{F}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ik}} \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varepsilon_{ik}} \equiv \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \varepsilon_{ki}}\right) \qquad (i\,, k = 1\,, 2\,, 3). \tag{44}$$

In parallelo, dalla (30) discendono legami, equivalenti, del tipo

$$\mathfrak{D}\bar{\mathrm{Y}}_{ik} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}(\bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}^{ik}} \qquad \left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \bar{\varepsilon}^{ik}} \equiv \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \bar{\varepsilon}^{ki}}\right) \qquad (i\,, k = 1\,, 2\,, 3), \tag{45}$$

essendo $\bar{\mathfrak{F}}$ (funzione delle $\bar{\varepsilon}^{ik}$) il potenziale termodinamico espresso mediante le variabili $\bar{\varepsilon}^{ik}$, come dalla $(25)_2$.

Relazioni più generali si ottengono parimenti dalla (40) o dalla (41), non appena sia precisata la dipendenza del riferimento anolonomo $\{\underset{r}{\lambda}\}$ dalla configurazione attuale C.

5. SISTEMI ISOTROPI. – Diremo che il sistema continuo tridimensionale S è *isotropo*, rispetto alla configurazione di riferimento C_*, se la terna principale di deformazione (11) *relativa alla metrica* g_{ik} è, *per ogni* C, anche terna principale di tensione.

È notevole, a mio avviso, la circostanza che in tale enunciato, subordinato ai soli concetti di deformazione e sforzo, *la dipendenza dalla configurazione di riferimento* C_* *interviene solo attraverso la sua metrica* g_{ik}.

In ogni caso tale definizione, che in sostanza è dovuta a Signorini, suol tradursi nella condizione che il tensore lagrangiano degli sforzi Y^{ik} ammetta, *rispetto alla metrica di riferimento* g_{ik}, una stessa terna unita del tensore di deformazione ε_{ik} (12).

(9) Per brevità si pensa a trasformazioni isotermiche.
(10) Per unità di volume della configurazione di riferimento.
(11) Generalmente il tensore di deformazione ammette una sola terna unita.
(12) Si cfr. [9] p. 136, nonché [7] p. 8. Per il caso linearizzato si veda [1].

In termini equivalenti, si può dire [cfr. la (32)] che *il sistema* S *è isotropo in* C_* *se il tensore* $\overline{Y}_{ik}$ di cui alla (31) *ammette una stessa terna unita, rispetto alla metrica di riferimento* g_{ik}, *del tensore* $\bar{\varepsilon}^{ik}$ definito dalla (26).

Si noti che questa traduzione della definizione è, per certi aspetti, *duale* della precedente.

Per un sistema a trasformazioni reversibili, la condizione di isotropia equivale, nella prima formulazione, a quella che il potenziale termodinamico dipenda dalle ε_{ik} solo attraverso gli invarianti I_k $(k = 1, 2, 3)$, ovvero sia funzione degli scalari

$$(46) \qquad \mathfrak{L} \equiv g^{ik}\,\varepsilon_{ik} \quad , \quad \mathfrak{Q} \equiv g^{ir}\,g^{ks}\,\varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{rs} \quad , \quad \mathfrak{C} \equiv g^{ir}\,g^{ls}\,g^{mk}\,\varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{rs}\,\varepsilon_{lm}\,.$$

Nella seconda formulazione equivale, per contro, all'ipotesi che $\mathfrak{F}$ dipenda dalle $\bar{\varepsilon}^{ik}$ per il tramite degli invarianti $\bar{I}_k$ $(k = 1, 2, 3)$, ovvero sia funzione di

$$(47) \qquad \bar{\mathfrak{L}} \equiv g_{ik}\,\bar{\varepsilon}^{ik} \quad , \quad \bar{\mathfrak{Q}} \equiv g_{ir}\,g_{ks}\,\bar{\varepsilon}^{ik}\,\bar{\varepsilon}^{rs} \quad , \quad \bar{\mathfrak{C}} \equiv g_{ir}\,g_{ls}\,g_{mk}\,\bar{\varepsilon}^{ik}\,\bar{\varepsilon}^{rs}\,\bar{\varepsilon}^{lm}\,.$$

La dimostrazione di tale equivalenza è la stessa, in sostanza, che nel primo caso.

La proprietà diretta è immediata. Ammesso che sia

$$(48) \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{L}\,,\,\mathfrak{Q}\,,\,\mathfrak{C}),$$

l'ipotesi che il sistema S sia a trasformazioni reversibili si traduce, come dalle (44) e (46), nelle sei uguaglianze

$$(49) \qquad -\mathfrak{D}Y^{ik} = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{L}}\,g^{ik} + 2\,\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{Q}}\,g^{ir}\,g^{ks}\,\varepsilon_{rs} + 3\,\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{C}}\,g^{ir}\,g^{ls}\,g^{mk}\,\varepsilon_{rs}\,\varepsilon_{lm} \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3).$$

Si vede bene di qui che *ogni direzione* λ^k *unita per il tensore* ε_{ik} *rispetto a* g_{ik} : $\varepsilon_{ik}\,\lambda^k = E\lambda_i$, *è anche direzione unita per* Y^{ik} : $Y^{ik}\,\lambda_k = B\lambda^i$, col seguente legame tra gli autovalori corrispondenti:

$$(50) \qquad -\mathfrak{D}B = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{L}} + 2\,\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{Q}}\,E + 3\,\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{C}}\,E^2.$$

Viceversa, ammettiamo che la terna $\{\underset{r}{\lambda}\}$ $(r = 1, 2, 3)$ delle direzioni unite di ε_{ik} (rispetto a g_{ik}) dia direzioni unite anche per il tensore Y^{ik}, e facciamo vedere che, dall'uguaglianza

$$(51) \qquad -\mathfrak{D}Y^{ik}\,\delta\varepsilon_{ik} = \delta\mathfrak{F}(\varepsilon),$$

valida per ogni variazione delle ε_{ik} *a partire da* C, segue per $\mathfrak{F}$ una dipendenza dalle ε_{ik} del tipo (48).

Per questo specializziamo, nella (40), il riferimento anolonomo ivi considerato, pensandolo coincidente localmente con la terna principale di deformazione.

L'ipotesi ammessa implica allora la simultanea riduzione dei tre tensori ε_{ik}, Y^{ik} e g_{ik} a forma diagonale:

$$(52) \qquad \underset{rs}{\varepsilon} = E_r\,\delta_{rs} \quad , \quad \overset{rs}{Y} = B^r\,\delta^{rs} \quad , \quad \underset{rs}{g} = \delta_{rs}\,,$$

essendo E_r e B^r $(r = 1, 2, 3)$ le caratteristiche principali di deformazione e tensione rispettivamente. Ne consegue dalla (40), stante l'antisimmetria del tensore $\delta \underset{kh}{\omega}$, la seguente espressione del lavoro delle forze intime (13):

$$\delta l^{(i)} = \mathfrak{D} \mathrm{B}^r \, \delta \mathrm{E}_r ; \tag{53}$$

sì che il potenziale termodinamico corrispondente, riducendosi ad una forma differenziale nelle tre variabili E_r, è necessariamente del tipo (48).

Naturalmente, considerando l'aspetto duale, si avranno i legami, ovvio essendo il significato dei simboli,

$$\mathfrak{D} \bar{\mathrm{Y}}_{ik} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \bar{\mathfrak{L}}} g_{ik} + 2 \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \bar{\mathfrak{Q}}} g_{ir} g_{ks} \, \bar{\varepsilon}^{rs} + 3 \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \bar{\mathfrak{C}}} g_{ir} g_{ls} g_{mk} \, \bar{\varepsilon}^{rs} \, \bar{\varepsilon}^{lm} \qquad (i , k = 1 , 2 , 3) \tag{54}$$

nonché, per gli autovalori,

$$\mathfrak{D} \bar{\mathrm{B}}^r = \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \bar{\mathfrak{L}}} + 2 \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \bar{\mathfrak{Q}}} \bar{\mathrm{E}}_r + 3 \frac{\partial \bar{\mathfrak{F}}}{\partial \bar{\mathfrak{C}}} \bar{\mathrm{E}}_r^2 \qquad (r = 1 , 2 , 3). \tag{55}$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

[1] CATTANEO–GASPARINI I., *Sopra una proprietà caratteristica dei sistemi isotropi*, « Boll. U.M.I. », s. II, anno V (1943).

[2] ERICKSEN J. L., *Tensor fields*, « Handbuch der Physik », III/I, Berlin 1960.

[3] FERRARESE G., *Sulla velocità angolare nei moti rigidi e la rotazione locale nelle deformazioni finite*, « Rendic. di Matem. » (1–2), 18 (1959).

[4] FERRARESE G., *Sulla forma intrinseca delle condizioni di congruenza per deformazioni finite*, « Rendic. Acc. Lincei », s. VIII, *36*, 5 (1964).

[5] GALLETTO D., *Qualche osservazione di cinematica delle deformazioni finite*, « Memorie Acc. Patavina SS.LL.AA. », 78 (1966).

[6] GALLETTO D., *Sulla condizione di isotropia per i sistemi continui a trasformazioni reversibili*, « Rendic. Semin. Matem. di Padova », *37* (1967).

[7] MANACORDA T., *Relazioni fra deformazioni e stato di tensione per un generico solido incomprimibile a trasformazioni reversibili*, « Boll. U.M.I. », s. III, anno XII (1957).

[8] SEDOV L. I., *Foundations of the non linear mechanics of continua*, Pergamon Press (1966).

[9] SIGNORINI A., *Trasformazioni termoelastiche finite*, « Memorie Ann. di Matem. », s. IV, 22 (1943).

[10] SIGNORINI A., *Estensione delle formule di Almansi a sistemi elastici anisotropi*, « Rend. Acc. Lincei », s. VIII, *25*, 5 (1958).

[11] TRUESDELL C. e TOUPIN R., *The classical field theories*, « Handbuch der Physik », III/I, Berlin (1960).

(13) Se il sistema continuo non è isotropo, ma si continua a supporre che $\{\underset{r}{\lambda}\}$ sia terna principale di deformazione, non sparisce, come è naturale, la dipendenza da $\delta \underset{kh}{\omega}$ che si riduce, come dalla (43), ad una forma differenziale in *tre* variabili, quante ne occorrono per definire l'orientamento della terna $\{\underset{r}{\lambda}\}$ (cfr. [9], p. 128, nonchè [10], p. 252).