
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ORAZIO SORACE

Sistemi ternari con quasizero destro associati a piani grafici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.2, p. 158–163.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_2_158_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Sistemi ternari con quasizero destro associati a piani grafici* (*). Nota di ORAZIO SORACE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Some properties concerning a ternary system with right quasizero associated with the points U, V of a (V, UV) -desarguesian plane.

1. Il presente lavoro fornisce caratterizzazioni di sistemi ternari con quasizero destro R associati a due punti U e V di un piano grafico. Precisamente si trovano due condizioni, la prima delle quali (VI) è necessaria perché nel sistema ternario R valga la prima condizione di linearità (2.2), mentre la seconda condizione (VII) è necessaria affinché valga la quasiassociatività dell'addizione (3.1). Se il piano è (V, UV) -desarguesiano, ciascuna delle due condizioni diventa anche sufficiente (2.3) e (3.3). Le due condizioni assieme sono sufficienti affinché ogni quasizero destro sia uno zero destro (2.1). La quasiassociatività diventa l'associatività dell'addizione se in R vale la prima condizione di linearità (3.2).

2. Un sistema ternario con quasizero destro $R = (S, T), [I]$, è un insieme S di almeno due elementi distinti con una operazione ternaria T definita su S , tale che, per tutti gli a, b, c, d, m in S , si abbia:

I. $T(a, b, x) = c$, ha una unica soluzione x in S .

II. $T(x, a, b) = T(x, c, d)$, $a \neq c$, ha una unica soluzione x .

III. $T(a, x, y) = b$, $T(c, x, y) = d$, $a \neq c$, ha almeno una soluzione x e y .

IV. $T(a, m, b) = T(c, m, b) = d$, $a \neq c$, implica che sia $T(x, m, b) = d$, per tutti gli x in S .

Facilmente si dimostra che [2]:

III'. La soluzione x e y della III è unica.

IV'. Esiste un elemento $z \in S$ (*quasizero destro*) tale che $T(x, z, b)$ è indipendente da x . Può quindi definirsi un'applicazione biunivoca α tra gli elementi di S , tale che sia

$$(I) \quad T(x, z, b) = b^\alpha$$

per qualsiasi x .

V. $T(x, m, b) = c$, $m \neq z$, ha una unica soluzione x .

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di Ricerca Matematica n. 17 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1969.

Quando in un piano grafico [3] si fissano due punti distinti U e V , ad esso si può associare un tale sistema ternario R nella seguente maniera.

A ciascun punto della retta $\gamma = UV$ distinto da V si assegni un simbolo ad esempio m , e diremo che (m) è la sua coordinata. Ad U si assegni il simbolo z . Chiamiamo con S l'insieme di tali simboli. La sua cardinalità sarà uguale all'ordine n del piano.

A ciascuna retta contenente V e distinta da γ si assegni un simbolo, ad esempio $a \in S$, e diremo che $[a]$ è la sua coordinata. A ciascuna retta contenente U e distinta da γ si assegni una coordinata $[b]'$, dove $b \in S$.

A ciascun punto $P \in \gamma$ assegniamo le coordinate (a, b) , dove $[a]$ è la coordinata della retta VP e $[b]'$ è quella della retta UP . Così tutti i punti tranne di V hanno le loro coordinate.

Se $M(m)$ è un punto di γ distinto da V , assegniamo a ciascuna retta contenente M e distinta da γ delle coordinate $[m, p]$ con $p \in S$, in modo tale che, fissato m , vi sia corrispondenza biunivoca tra le rette per M e i simboli p . Così tutte le rette, ad eccezione di γ , hanno coordinate. Anzi le rette contenenti U , ed esse soltanto, hanno due tipi di coordinate: $[b]'$ e $[z, d]$.

Alle volte indicheremo le rette ed i punti con le loro coordinate. Si definisca una operazione ternaria T su S ponendo $T(a, m, p) = b$ se e solo se $(a, b) \in [m, p]$. Allora facilmente si verifica che $R = (S, T)$ è un sistema ternario con quasizero destro z . La (1) ci porge che è $b = d^a$ se è $[b]' = [z, d]$, cioè risulta

$$(2) \quad [z, d] = [d^a]'$$

per qualsiasi $d \in S$.

Nel caso che l'applicazione α sia l'identità allora z è uno zero destro.

Si può viceversa dedurre da un sistema ternario $R = (S, T)$ assegnato un piano grafico, chiamando punti: $(a, b), (m), V$, dove $a, b, m \in S$ e $V \in S$ e chiamando rette: l'insieme costituito da tutti i punti (a, b) con a fissato e da V , l'insieme formato da (m) e da tutti i punti (a, b) tali che $T(a, m, p) = b$, essendo m, p elementi fissati di S , l'insieme formato da V e da tutti i punti (m) . È evidente che un piano grafico, cui è associato un sistema ternario R , è isomorfo al piano grafico dedotto da R .

Per dedurre da un sistema ternario R le due operazioni naturali si ponga:

$$(3) \quad am = T(a, m, z).$$

Per la V l'equazione

$$(4) \quad xm = c, \quad (m \neq z)$$

ha una unica soluzione x .

Consideriamo l'applicazione β per cui ad ogni elemento $a \neq z$ di S si faccia corrispondere la soluzione dell'equazione $xa = a$, cioè sia

$$(5) \quad a^\beta a = a.$$

Essendo, qualunque sia x , $xz = z^\alpha$, potremo porre

$$(6) \quad z^\alpha = z^3 = z.$$

Poniamo poi

$$(7) \quad a + b = T(a^3, a, b).$$

Per le (3), (5), (6) e (7) risulta

$$(8) \quad az = z \quad ; \quad a + z = a \quad ; \quad z + a = a^\alpha.$$

Facilmente si dimostra che l'equazione

$$(9) \quad a + x = b$$

ha una unica soluzione e che

$$(10) \quad \text{da } ma = na \quad (a \neq z) \quad \text{segue } m = n,$$

$$(11) \quad \text{da } a + b = a + c \quad \text{segue } b = c.$$

In seguito ci sarà utile considerare un sistema ternario R nel quale valga uno dei seguenti assiomi aggiuntivi (o tutti e due).

VI. Se nella II risulta $b = d$, la soluzione x è indipendente da b .

VII. Se nella V risulta $b = c$, la soluzione x è indipendente da b .

Il significato geometrico della VI è che tutte le coppie di rette del tipo $[a, b]$, $[c, b]$ con a e c fissati e distinti e b variabile si intersecano in punti di una retta contenente V . Tale retta dipende dalla coppia a, c di numeri fissati. Il significato geometrico della VII è che tutte le coppie di rette del tipo $[m, b]$, $[b]'$, con $m \neq z$ fissato e b variabile si intersecano in punti di una retta contenente V . Tale retta dipende da m .

Dimostreremo ora che:

2.1. *Se in un sistema ternario R vale sia la VI che la VII, allora z è uno zero destro.*

Nella ipotesi fatta, fissato $m \neq z$, ci sono $x', x'' \in S$ tali che per qualsiasi b risulti

$$T(x', m, b) = T(x', z, b) = b^\alpha \quad ; \quad T(x'', m, b) = b.$$

Da queste, per $b = z$, per la (6) e per la II, si ha $x' = x''$ e quindi $b^\alpha = b$ ed α è l'identità.

2.2. *Se in un sistema ternario R vale la prima condizione di linearità, in esso varrà la VI.*

Infatti se x' è la soluzione (II) dell'equazione $xa = xc$ ($a \neq c$), si avrà, per qualsiasi b , $x'a + b = x'c + b$ e, per la prima condizione di linearità ⁽¹⁾, $T(x', a, b) = T(x', c, b)$.

(1) La prima condizione di linearità asserisce infatti che: $T(x', a, b) = x'a + b$ (v. [3], p. 378).

2.3. Se un piano è (V, UV) -desarguesiano, in ogni sistema ternario relativo ad U e V in cui valga la VI, varrà la prima condizione di linearità. Viceversa: se in ogni sistema ternario relativo ad U e V vale la prima condizione di linearità, il piano è (V, UV) -desarguesiano.

Si vuol dimostrare che, se a, b, m sono tre elementi qualsiasi di un sistema ternario relativo ai punti U, V di un piano (V, UV) -desarguesiano in cui valga la VI risulta

$$(12) \quad T(a, m, b) = am + b.$$

Supporremo $b \neq z \neq m$, altrimenti la (12) è ovvia. Se fosse $am = m$, sarebbe $a = m^\beta$ e la (12), per le (5) e (7), è ovvia. Se fosse $am = z$, cioè $T(a, m, z) = T(a, z, z)$, per la VI, sarebbe $T(a, m, b) = T(a, z, b)$ e quindi, per la terza delle (8), si avrebbe subito la (12). Potremo quindi nel seguito supporre $z \neq am \neq m$.

Chiameremo $\bar{x}$ la soluzione dell'equazione $xm = x(am)$ (II). È chiaro che $\bar{x}, a, (am)^\beta$ sono tutti e tre coincidenti ovvero a due a due distinti. Infatti se fosse $\bar{x} = a$, sarebbe $am = a(am)$ e quindi $a = (am)^\beta$. Se fosse $\bar{x} = (am)^\beta$, per la (5), sarebbe $(am)^\beta m = am$ e quindi, per la (10), $(am)^\beta = a$. Se fosse infine $a = (am)^\beta$, sarebbe $a(am) = am$ e quindi, per la VI, sarebbe $\bar{x} = a$. In tal caso, poiché $T(\bar{x}, m, z) = T(\bar{x}, am, z)$, sarà per la VI, $T(\bar{x}, m, b) = T(\bar{x}, am, b)$ e, per le ipotesi fatte, $T(a, m, b) = T((am)^\beta, am, b)$ e cioè la (12). Potremo quindi nel seguito supporre che $\bar{x}, a, (am)^\beta$ siano a due a due distinti.

Si ponga $A_1 = [m, z] \cap [am, z]$, $A_2 = [a] \cap [m, z]$, $B_1 = [m, b] \cap [am, b]$, $B_2 = [a] \cap [m, b]$. Sarà $A_2(a, am)$, $B_2(a, T(a, m, b))$.

Si ponga $A_3 = UA_2 \cap [am, z]$. Poiché è $UA_2 = [am]'$, sarà $VA_3 = [(am)^\beta]$. Ponendo $B_3 = [(am)^\beta] \cap [am, b]$, si ha $B_3((am)^\beta, am + b)$.

Ovviamente risulta $VA_2 = VB_2$, $VA_3 = VB_3$ e, per la VI, $VA_1 = VB_1 = [\bar{x}]$, così come $A_1 A_2 \cap B_1 B_2 = (m) \in UV$, $A_1 A_3 \cap B_1 B_3 = (am) \in UV$ ed $A_2 U = A_3 U$. Considerando quindi i sei punti A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$), per le osservazioni sopra fatte, essi formano due triangoli che soddisfano alle condizioni della (V, UV) -proposizione di Desargues [4]. Avremo quindi che è $B_2 U = B_3 U$ e quindi la (12).

Viceversa, se in ogni sistema ternario R relativo ad U e V vale la prima condizione di linearità, varrà, per il 2.2, la VI e quindi dai due triangoli di cui sopra, poiché, per la (12), è $B_2 U = B_3 U$, si deduce che il piano è (V, UV) -desarguesiano, non essendo restrittiva la ulteriore condizione che sia $A_2 A_3 \cap \gamma = U$ [4].

3. Diremo che nel sistema ternario R vale la *quasiassociatività dell'addizione* se, comunque si assegnino $a, m, c \in S$ ($a \neq z$), se l soddisfa alla

$$(13) \quad a^\beta m = a + lm,$$

risulta

$$(14) \quad a + T(l, m, c) = T(a^\beta, m, c).$$

Osserviamo che, per le (8), per $m = z$, la (13) avrebbe senso solo se $a = z$. Supporremo quindi nel seguito $m \neq z$, nel qual caso, per le (9) e (4), esiste uno ed un solo valore di l che soddisfa alla (13). Dimosteremo ora che:

3.1. *Se in un sistema ternario R vale la quasiassociatività dell'addizione, in esso varrà la VII.*

Infatti, se poniamo $a = m$, la (13), per le (5), (9), (8), ci dà $lm = z$ e la (14), per le (7) e (11) diventa $T(l, m, c) = c$ e quindi vale la VII.

Il motivo per cui tale particolarità del sistema ternario R è stata chiamata quasiassociatività dell'addizione è dato dal seguente teorema.

3.2. *Se in un sistema ternario R vale la quasiassociatività dell'addizione e la prima condizione di linearità, in esso varrà l'associatività dell'addizione.*

Assegnati infatti $a, b, c \in S$, ($a \neq z$) e posto $b = lm$, dalle (13) e (14) segue subito che $a + (b + c) = (a + b) + c$. Per i teoremi 2.2, 3.1, 2.1, il sistema ternario R è dotato di zero destro (cioè $\alpha = 1$). Quindi l'associatività dell'addizione vale anche per $a = z$, perché in tal caso essa, per la terza delle (8), diviene $(b + c)^a = b^a + c$.

3.3. *Se un piano è (V, UV) -desarguesiano, in ogni sistema ternario relativo ad U e V in cui valga la VII, varrà la quasiassociatività dell'addizione. Viceversa: se in ogni sistema ternario relativo ad U e V vale la quasiassociatività dell'addizione, il piano è (V, UV) -desarguesiano.*

Siano $a, m, c, (a \neq z)$, tre elementi qualsiasi di un sistema ternario relativo ai punti U e V di un piano (V, UV) -desarguesiano, in cui valga la VII; si vuol dimostrare che, se l soddisfa alla (13), sarà verificata la (14). Se $c = z$, la (14) discende subito dalla (13). Nel seguito potremo quindi supporre che a, m, c siano distinti da z e che sia $a \neq m$, altrimenti la (14) discende subito dalla (13), poiché vale la VII.

Chiameremo $\bar{x}$ la soluzione dell'equazione $xa = z$. Se fosse $\bar{x} = a^3$, per la (5), sarebbe $a = z$, il che è da escludersi. Se fosse $l = a^3$, la (13) diventerebbe $T(l, a, lm) = lm$ e, per la VII, si avrebbe $\bar{x} = l$. Se fosse infine $\bar{x} = l$, sarebbe, per la VII, $T(l, a, lm) = T(l, m, z)$ e, per la (13), $T(a^3, a, lm) = T(a^3, m, z)$, per cui, per la II, sarebbe $l = a^3$. Potremo quindi nel seguito supporre $\bar{x}, a^3, l$ a due a due distinti.

Si ponga $A_1 = [a^3] \cap [m, z]$ e sia $A(a)$. Se è $AA_1 = [a, b]$, b soddisfa alla $a^3 m = a + b$. Se si pone $A_2 = [b]' \cap [m, z]$ ed è $VA_2 = [l]$, sarà $lm = b$; così l soddisfa alla (13).

Se si pone $A_3 = [a, b] \cap [b]'$, sarà per la VII, $VA_3 = [\bar{x}]$. Ponendo $B_1 = [a^3] \cap [m, c]$, $B_2 = [l] \cap [m, c]$, sarà $B_1(a^3, T(a^3, m, c))$, $B_2(l, k)$, essendo $k = T(l, m, c)$. Se indi poniamo $B_3 = [k]' \cap [a, k]$, sarà, per la VII, $VA_3 = VB_3 = [\bar{x}]$. Ovviamente risulta anche $VA_1 = VB_1 = a^3$ e $VA_2 = VB_2 = l$, così come $A_1 A_2 \cap B_1 B_2 = (m) \in UV$, $A_2 A_3 \cap B_2 B_3 = U$, $AA_1 = AA_3 = [a, b]$.

Considerando quindi i sei punti A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$), per le osservazioni sopra fatte, essi formano due triangoli che soddisfano alle condizioni della (V, UV) -proposizione di Desargues [4]. Avremo quindi $B_1 \in AB_3$ e sarà così soddisfatta la (14).

Viceversa, se in ogni sistema ternario R relativo ad U e V vale la quasias-sociatività dell'addizione, varrà, per il teorema 3.1, la VII e quindi dai due triangoli di cui sopra, poiché per la (14) è $B_1 \in AB_3$, si deduce che il piano è (V, UV) -desarguesiano, non essendo restrittiva la condizione ulteriore che $A_2 A_3 \cap B_2 B_3 = U$ [4].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. E. MARTIN, *Planar ternary rings and latin squares*, « Le Matematiche », XXIII, 2, 305-318 (1968).
- [2] G. E. MARTIN, *Projective planes and isotopic ternary rings*, « Amer. Math. Monthly », 74, 1185-1195 (1967).
- [3] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry (with an appendix by L. Lombardo-Radice)*, « Ediz. Cremonese », 365-366, Roma 1961.
- [4] G. PICKERT, *Projective Ebenen*, « Springer-Verlag », 73-78, Berlin 1955.