Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paul Dubreil

Sur le demi-groupe des endomorphismes d'une algèbre abstraite

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.2, p. 149–153.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_2_149_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Algebra. — *Sur le demi-groupe des endomorphismes d'une algèbre abstraite.* Nota di PAUL DUBREIL, presentata [(*)] dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Esposizione, sotto forma concisa, di risultati sul semigruppo degli endomorfismi di un'algebra astratta (nel senso di G. Birkhoff [2]), provenienti dai successivi sviluppi [5], [6] di un corso riattaccantesi particolarmente ai lavori di Fitting [7], Baer [1], Specht [13], Ramalho [12], Fuchs [8], Doss e Miller [4], Clifford e Preston [3]. Una trattazione completa, riproducente una serie di lezioni recentemente date all'Università di Roma, verrà pubblicata nei *Rendiconti di Matematica*.

Punto di partenza è il risultato di Grätzer [9] e Waterman secondo cui ogni semigruppo avente un elemento unità è isomorfo al semigruppo degli endomorfismi di un'algebra opportuna. Nella presente Nota vengono essenzialmente determinati quali *legami* intercorrano fra la struttura di un'algebra G assegnata e quella del semigruppo H dei suoi endomorfismi, come dev'essere G affinché H goda di proprietà strutturali notevoli analoghe a quelle di un insieme o di uno spazio vettoriale [3], [4], e cosa si può dire di siffatte proprietà nel caso generale.

1. – DÉTERMINATION DES ENDOMORPHISMES.

Soient $\mathfrak{S}$ l'ensemble des sous-algèbres $S, \cdots$ de l'algèbre donnée G, $\mathbf{C}$ l'ensemble des ses congruences $\mathcal{C}, \cdots$, Q l'ensemble des algèbres quotients $G/\mathcal{C}, \cdots$.

Si η est un endomorphisme de G, d'image S_η, de congruence nucléaire $\mathfrak{N}_\eta$ $(x \equiv y\ (\mathfrak{N}_\eta)\,,\ (x\,,\,y \in G) \Longleftrightarrow \eta x = \eta y)$, i_η l'isomorphisme canonique de $G/\mathfrak{N}_\eta$ sur S_η, γ_η l'homormophisme surjectif canonique de G sur $G/\mathfrak{N}_\eta$ et j_η l'injection canonique de S_η dans G, nous avons:

$$(1) \qquad \eta = j_\eta\, i_\eta\, \gamma_\eta\,.$$

S'il existe inversement un isomorphisme i d'une algèbre-quotient $Q = G/\mathcal{C}$ sur une sous-algèbre S, si γ est l'homomorphisme surjectif canonique de G sur $G/\mathcal{C}$ et j l'injection canonique de S dans G, tout composé

$$(2) \qquad h = j\alpha_S\, i\gamma \qquad \text{où } \alpha_S \in \operatorname{Aut} S$$

(Aut S désigne le groupe des automorphismes de S), est un endomorphisme de G ayant $\mathcal{C}$ pour congruence nucléaire et S pour image.

Décomposons donc Q en classes $U, \cdots$ d'algèbres-quotients isomorphes, $\mathfrak{S}$ en classes $V, \cdots$ de sous-algèbres isomorphes et appelons *couples endogènes* les couples (U, V) pour lesquels un (ou chaque) représentant $Q = G/\mathcal{C}$ de U est isomorphe à un (ou chaque) représentant S de V. Chaque couple endogène fournit un ensemble d'endomorphismes de G caractérisé par la

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1969.

propriété que les images sont isomorphes (ainsi que les algèbres–quotients par les congruences nucléaires). Le cardinal de cet ensemble est celui du produit cartésien $U \times V \times A\mathit{ut}\, S$, $(S \in V)$, d'après 2).

2. – Endomorphismes extensifs, rétractifs; idempotents et sous–groupes de H.

A chaque endomorphisme η sont associées la suite décroissante

$$(\mathbf{S}_\eta) \qquad (G \supseteq)\, S_\eta \supseteq S_{\eta^2} \supseteq \cdots \supseteq S_{\eta^k} \supseteq \cdots$$

des images des puissances de η et la suite croissante

$$(\mathbf{N}_\eta) \qquad (\mathcal{E} \subseteq)\, \mathfrak{N}_\eta \subseteq \mathfrak{N}_{\eta^2} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{N}_{\eta^k} \subseteq \cdots$$

des congruences nucléaires des puissances de η ($\mathcal{E}$ désigne l'égalité dans G). Les cas dans lesquels l'une de ces suites est stationnaire ont été étudiés en théorie des groupes ou des boucles [1], [12], [13].

Il est commode d'appeler *extensif* un endomorphisme η tel que $S_\eta = S_{\eta^2} (= \cdots)$, *rétractif* un endomorphisme η tel que $\mathfrak{N}_\eta = \mathfrak{N}_{\eta^2} (= \cdots)$. Soient Σ', Θ' respectivement l'ensemble des endomorphismes extensifs et celui des endomorphismes rétractifs. L'ensemble des endomorphismes pour lesquels la suite $(\mathbf{S}_\eta)$ est stationnaire (à partir d'un certain rang) est le *radical* de Σ', $P(\Sigma') = \{\lambda, \lambda \in H ; \lambda^k \in \Sigma'$ pour un certain entier $k\}$. De même $(\mathbf{N}_\eta)$ est stationnaire si et seulement si η appartient au radical $P(\Theta')$. Si nous désignons par Σ et Θ respectivement l'ensemble des endomorphismes surjectifs et celui des injectifs, par $A = \Sigma \cap \Theta$ le groupe des automorphismes de G $(P(A) = A)$, les inclusions évidentes:

$$A \subseteq \Sigma \subseteq \Sigma' \subseteq P(\Sigma') \quad , \quad A \subseteq \Theta \subseteq \Theta' \subseteq P(\Theta')$$

peuvent être complétées (grâce à l'extension de théorèmes établis dans [12], [13] pour les groupes) par les *propriétes d'intersection*:

$$\Theta' \cap \Sigma = P(\Theta') \cap \Sigma = A = \Theta \cap P(\Sigma') = \Theta \cap \Sigma',$$

$$P(\Theta') \cap \Sigma' = \Theta' \cap \Sigma' = P(\Sigma') \cap \Theta'.$$

Alors que Σ et Θ sont stables, Σ' et Θ' sont *semi–stables* ($\eta \in \Sigma' \Rightarrow \eta^k \in \Sigma'$ pour tout entier naturel k), $P(\Sigma')$ et $P(\Theta')$ sont *fuselés*, c'est–à–dire semi–stables et semi–premiers. L'ensemble $\Xi' = H - [P(\Theta') \cup P(\Sigma')]$ est fuselé lui–aussi; ses éléments sont dits *hypersinguliers*. Tout élément de $H - [P(\Theta') \cap \cap P(\Sigma')]$ est *apériodique*. $P(\Sigma') \setminus P(\Theta')$, $P(\Theta') \setminus P(\Sigma')$ et Ξ' sont des ensembles *vides ou infinis*. $H - P(\Sigma')$ est *vide* dès que la condition de chaîne descendante est verifiée par l'ensemble des images (en particulier par l'ensemble des sous–algèbres), $H - P(\Theta')$ est *vide* dès que la condition de chaîne ascendante est verifiée par l'ensemble des congruences nucléaires (en particulier par l'ensemble des congruences).

Une congruence $\mathcal{C}$ et une sous-algèbre S seront dites *supplémentaires* si, $\mathcal{C}(S)$ désignant l'*extension saturée* de S par $\mathcal{C}$ (réunion des classes modulo $\mathcal{C}$ rencontrant S) et $\mathcal{C}|S$ la *restriction* de $\mathcal{C}$ à S, on a:

$$(3) \qquad \mathcal{C}(S) = G, \qquad\qquad (3') \qquad \mathcal{C}|S = \mathcal{E}|S$$

($\mathcal{E}$ égalité dans G). Les égalités (3) et (3′) entraînent l'existence d'un isomorphisme i de $G/\mathcal{C}$ sur S (à chaque classe modulo $\mathcal{C}$, i associe l'unique représentant de cette classe situé dans S). *La congruence nucléaire* $\mathfrak{N}_\omega$ *et l'image* S_ω *d'un endomorphisme idempotent* ω *sont supplémentaires*; *réciproquement, à chaque couple* ($\mathcal{C}$, S) *formé par une congruence* $\mathcal{C}$ *et une sous-algèbre* S *supplémentaires, correspond un idempotent* ω *et un seul tel que* $\mathfrak{N}_\omega = \mathcal{C}$ *et* $S_\omega = S$. *Le plus grand sous-groupe* Γ_ω *d'élément neutre* ω, [3], *n'est autre que l'ensemble des endomorphismes* η *tels que* $\mathfrak{N}_\eta = \mathfrak{N}_\omega$ *et* $S_\eta = S_\omega$; *de* (2) *résulte qu'il est isomorphe au groupe* Aut S_ω.

La réunion des sous-groupes maximaux Γ_ω (*quand* ω *décrit l'ensemble* Ω *des idempotents*) *coïncide avec* $\Theta' \cap \Sigma'$; *la réunion de leurs radicaux est* $P(\Theta') \cap P(\Sigma')$.

3. – ÉQUIVALENCES $\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{R}^*$; ENDOMORPHISMES RATIONNELS, VECTORIELS (A GAUCHE OU A DROITE).

La caractérisation précédente du sous-groupe maximal Γ_ω conduit à considérer, dans H, les deux relations d'équivalence $\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{R}^*$ définies par:

$$\eta \mathfrak{L}^* \eta' \quad \text{si et seulement si} \quad \mathfrak{N}_\eta = \mathfrak{N}_{\eta'},$$

$$\eta \mathfrak{R}^* \eta' \quad \text{si et seulement si} \quad S_\eta = S_{\eta'}.$$

$\mathfrak{L}^*$ est *régulière à droite*, $\mathfrak{R}^*$ est *régulière à gauche* et ces deux équivalences sont *permutables*:

$$\mathfrak{L}^* \mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}^* \mathfrak{L}^* \qquad (= \sup(\mathfrak{L}^*, \mathfrak{R}^*))$$

que nous désignerons par $\mathfrak{D}^*$; nous poserons $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{L}^* \cap \mathfrak{R}^*$. Les classes modulo $\mathfrak{D}^*$ correspondent bijectivement aux couples endogènes du § 1.

Soient $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$ et $\mathfrak{D} = \mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{L}$ les équivalences de Green [3], [10], dans le demi-groupe H. Les inclusions $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^*, \cdots, \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}^*$ sont immédiates. Mais il est bon de pousser plus loin la comparaison entre ces deux types d'équivalences.

DÉFINITIONS. – Un endomorphisme η est *rationnel à droite* si

$$S_\lambda \subseteq S_\eta \qquad \text{entraîne} \quad \lambda \in |\eta) = \eta H$$

ou $\eta)$ est l'idéal à droite engendré par η; η est *rationnel à gauche* si

$$\mathfrak{N}_\mu \subseteq \mathfrak{N}_\eta \qquad \text{entraîne} \quad \mu \in (\eta| = H\eta.$$

Tout automorphisme possède ces deux propriétés.

La restriction $\mathfrak{R}^*|\Phi'$ *de* $\mathfrak{R}^*$ *à l'ensemble* Φ' *des endomorphismes rationnels à droite coïncide avec celle de* $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}^*|\Phi' = \mathfrak{R}|\Phi'; \qquad \text{de même} \quad \mathfrak{L}^*|\Phi'' = \mathfrak{L}|\Phi'',$$

Φ'' désignant l'ensemble des endomorphismes rationnels à gauche. De plus, si I', (I'') désigne l'ensemble des endomorphismes inversibles à droite (à gauche) on a:

$$\mathrm{I}' = \Sigma \cap \Phi' \quad , \quad \mathrm{I}'' = \Theta \cap \Phi''.$$

DÉFINITION. – Un endomorphisme η est *vectoriel à droite* s'il existe une sous-algèbre T de G telle que $\mathfrak{N}_\eta$ et T soient *supplémentaires*, ce qui entraîne $G/\mathfrak{N}_\eta \simeq T$: $G/\mathfrak{N}_\eta$ et T sont donc des représentants de classes U,V formant un couple endogène.

Tout endomorphisme idempotent est vectoriel à droite et, d'après la définition, *l'ensemble* Ψ' *des endomorphismes vectoriels à droite n'est autre que* $\mathfrak{L}^*(\Omega)$: *il contient donc l'ensemble* $\mathfrak{L}(\Omega) = \mathfrak{D}(\Omega)$ *des endomorphismes réguliers*.

De plus, *tout endomorphisme vectoriel à droite est rationnel à droite*: $\Psi' \subseteq \Phi'$.

DÉFINITION. – Un endomorsphisme η est *vectoriel à gauche* s'il existe une congruence $\mathfrak{C}$ telle que $\mathfrak{C}$ et S_η soient *supplémentaires*. On a les propriétés duales des précédentes, en particulier, Ψ'' désignant l'ensemble des endomorphismes vectoriels à gauche:

$$\mathfrak{D}(\Omega) \subseteq \mathfrak{R}^*(\Omega) = \Psi'' \subseteq \Phi''.$$

De plus, *les endomorphismes vectoriels (des deux côtés) ne sont autres que les endomorphismes réguliers, car nous avons les propriétés d'intersection*:

$$\Phi' \cap \Psi'' = \mathfrak{D}(\Omega) = \Phi'' \cap \Psi' = \Psi' \cap \Psi''$$

auxquelles s'ajoutent

$$\mathrm{I}' = \Sigma \cap \Psi' \,(= \Sigma \cap \Phi') \quad , \quad \mathrm{I}'' = \Sigma \cap \Psi'' \,(= \Sigma \cap \Phi''),$$

et, en appelant Δ' l'ensemble des épimorphismes (c'est-à-dire des endomorphismes simplifiables à droite), Δ'' l'ensemble des monomorphismes (endomorphismes simplifiables à gauche):

$$\Sigma = \Delta' \cap \Psi'' \quad , \quad \Theta = \Delta'' \cap \Psi'.$$

4. – ALGÈBRES PARTICULIÈRES.

Appelons *algèbres vectorielles* les algèbres dont tout endomorphisme est vectoriel (à droite et à gauche), ou régulier, donc pour lesquelles on a:

$$\mathrm{H} = \mathfrak{D}(\Omega) = \Psi' = \Psi'' = \Phi' = \Phi''.$$

Les espaces vectoriels en sont un cas particulier car la définition d'une algèbre vectorielle équivaut au fait que, quelque soit le couple endogène (U , V), pour tout représentant $G/\mathfrak{C}$ de U il existe un reprèsentant S′ de V tel que $\mathfrak{C}$ et S′ soient supplémentaires – et inversement. Cette condition est vérifiée aussi, par exemple, dans un groupe abélien dont tout sous-groupe est sommant direct. Ces endomorphismes d'une algèbre vectorielle ont les « bonnes » propriétés connues pour les espaces vectoriels, [3], [4].

On definira une *algèbre vectorielle à droite* (par exemple) par la condition $\Psi' = H\,(= \Phi')$. Ce cas dissymetrique se présente effectivement pour les *algèbres libres*, [14], (malgré la dualité observée dans la théorie générale). Nous avons ici $\Delta'' = \Theta$.

Dans une algèbre *rationnelle à droite* ($\Phi' = H$), nous avons $I' = \Sigma$ et $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^*$. Si G est *rationnelle* (des deux côtés), les équivalences $\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{R}^*$ coïncident respectivement avec les équivalences de Green $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{R}$.

Bien entendu, il reste à revenir d'une façon précise sur les cas particuliers fondamentaux (groupes, modules, etc.) pour voir à quelles conditions ils forment une algèbre de tel ou tel type. Il reste aussi à chercher les limites et les raisons des propriétés de dualité observées dans la théorie précédente, à donner des interprétations ou des prolongements dans le cadre des catégories, etc. Ces questions font l'objet de travaux récents, [11], ou en cours.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. BAER, *Splitting endomorphisms*, « Trans. Amer. math. Soc. », *61*, 508–516 (1947).

[2] G. BIRKHOFF, *Universal algebra*, « Proc. first canadian math. Congress », 310–326, Montreal 1945.

[3] A. H. CLIFFORD et J. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, « Providence, Amer. math. Soc. », (Math. Surveys 7) (1961).

[4] C. G. DOSS, *Certain equivalence relations in transformation semigroups* (Thesis, sous la direction de D. D. Miller, Univ. of Tennessee, 1955).

[5] P. DUBREIL, *Lectures on the algebraic theory of semi-groups*, « Tulane Univ. », New Orleans (1962).

[6] P. DUBREIL, *Endomorphismes*, Sém. Alg. et Théorie des Nombres, 23–01, Paris 1965.

[7] H. FITTING, *Die Theorie der Automorphismenringe Abelocher Gruppen und chr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen*, « Math. Ann. », *107*, 514–542 (1933).

[8] L. FUCHS, *Abelian groups*, Budapest 1958.

[9] G. GRÄTZER, *On the Endomorphism Semigroup of simple Algebras*, « Math. Ann. », *170*, 334–338.

[10] J. A. GREEN, *On the structure of semi-groups*, « Ann. of Math. », *54*, 163–172 (1951).

[11] J. P. LAFON, *Anneau des endomorphismes d'un module de type fini sur un anneau local*, « Annales Institut Fourier », *11*, 313–384, Thèse, Paris 1961.

[12] M. RAMALHO, *Sur quelques thèorèmes de la théorie des groupes*, « Rev. Fac. Ciencias, Lisboa », 2ª s. A, *8*, 333–337 (1960).

[13] W. SPECHT, *Gruppentheorie*, Springer, Berlin 1956.

[14] I. I. VALUCÈ, *Idéaux à gauche du demi-groupe des endomorphismes d'une algèbre universelle libre*, « Dokl. Akad. Nauk SSSR », *150*, 235–237 (1963); « Mat. Sbornik », Nov. Ser., *62*, 371–384 (1963).