Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domingos Pisanelli

Sull'estensione del teorema di Montel

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.2, p. 137–139.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_2_137_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Analisi funzionale. — *Sull'estensione del teorema di Montel* (*).
Nota di DOMINGOS PISANELLI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — We extend the classical theorem of Montel about normal families of analytic functions, to the case of operators defined in a finitely open set of a vector space on C and valued in a locally convex space on C. We obtain a necessary and sufficient condition about the space of values in order to obtain this extension.

In un lavoro precedente [1], abbiamo esteso il teorema classico di Montel per le famiglie di funzioni G–analitiche in un aperto Ω di uno spazio $\mathfrak{L}N^*$ a valori in uno spazio di Montel, equilimitate sui compatti di Ω. Ci osservò L. Nachbin che sarebbe interessante ottenere condizioni necessarie e sufficienti sullo spazio che contiene Ω per potere estendere il teorema di cui sopra.

In questo lavoro dimostriamo che possiamo prendere come spazio che contiene Ω un S.V. qualsiasi, come Ω un insieme finitamente aperto, ed estendere il teorema, di cui sopra, considerando famiglie equilimitate, soltanto sugl'insiemi finitamente compatti. È possibile fare questa estensione quando e soltanto quando lo spazio dei valori è pure uno spazio di Montel. Uno spazio di Banach è pure uno spazio di Montel quando e soltanto quando lo stesso ha dimensione finita, ciò, crediamo, spiega perché nel trattato di Hille « Functional Analysis and Semigroups » dove sono considerati solo spazi di Banach, non può comparire l'estensione del teorema di Montel.

Premettiamo delle notazioni, definizioni e teoremi ([2] e [3]):

X S.V. (spazio vettoriale su C).

Y S.L.C. (spazio localmente assolutamente convesso su C).

$\Omega \subset X$ si dice finitamente aperto quando è aperta l'immagine inversa di Ω secondo l'applicazione: $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in C^n \rightarrow$ $\rightarrow x_0 + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n \in X$ per ogni $x_0, h_1, \cdots, h_n \in X$ ed n naturale.

$G(\Omega, Y)$ spazio vettoriale su C delle funzioni G–analitiche in Ω, con valori in Y. f si dice G–analitica in Ω, quando esiste $\lim\limits_{\alpha \to 0} (f(x + \alpha h) - f(x))/\alpha$ per qualsiasi $x \in \Omega$ e $h \in X$.

In maniera equivalente $f(x + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n)$ è analitica in $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in D(x, h_1, \cdots, h_n) = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in C^n / x + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n \in \Omega\}$ per ogni $x \in \Omega$ ed $h_1, \cdots, h_n \in X$.

(*) Questo lavoro è stato eseguito in seguito a discussioni tenute a Lisbona col prof. José Sebastião e Silva, durante il nostro viaggio finanziato dal « Conselho Nacional de Pesquisas » e dalla « Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo ».

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1969.

Un insieme di X si dice finitamente compatto se è l'immagine di un compatto di C^n secondo l'applicazione:

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in C^n \to x_0 + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n \in X$$

per $x_0, h_1, \cdots, h_n \in X$ ed n naturale qualsiasi.

$G_c(\Omega, Y)$ è lo spazio $G(\Omega, Y)$ munito della topologia della convergenza uniforme sugl'insiemi finitamente compatti di Ω.

Uno S.L.C. si dice di Montel quando è separato ed ogni limitato è relativamente compatto.

Ogni sotto spazio vettoriale topologico chiuso di uno spazio di Montel è pure di Montel.

$H \subset G_c(\Omega, Y)$	è limitato quando le funzioni di H sono equilimitate, cioè, quando e soltanto quando l'insieme dei valori assunti dalle funzioni di H in ogni insieme finitamente compatto di Ω è limitato in Y.
$G \subset G_c(\Omega, Y)$	è l'insieme delle funzioni G–analitiche constanti su Ω. G è, in maniera evidente, isomorfo a Y come S.L.C.
$H(x)$	insieme dei valori assunti dalle funzioni di H in un punto x.
Y^Ω	insieme delle funzioni definite in Ω con valori in Y, munito della topologia della convergenza semplice.

TEOREMA. – *Una condizione necessaria e sufficiente affinché* $G_c(\Omega, Y)$ *sia di Montel è che pure* Y *lo sia.*

Necessaria.

Sia $G_c(\Omega, Y)$ di Montel. In virtù dell'ipotesi e dell'isomorfismo di S.L.C. tra G ed Y, la condizione è evidentemente necessaria.

Sufficiente.

Sia Y di Montel. $G_c(\Omega, Y)$ è separato perché la riunione degl'insiemi finitamente compatti di Ω, è Ω ed Y è separato. Sia $H \subset G_c(\Omega, Y)$ limitato. Per ogni $x \in \Omega$ si ha $H(x)$ limitato e perciò relativamente compatto in Y. Abbiamo allora che H è relativamente compatto in Y^Ω. Sia f_n un «net» di H. Esisterà un «sotto net», che continueremo ad indicare con f_n, che converge ad $f \in Y^\Omega$. Cioè nella topologia della convergenza semplice.

Le funzioni $f_n(x_0 + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n)$ sono analitiche ed equilimitate nei compatti di $D(x_0, h_1, \cdots, h_n)$ $(x_0, h_1, \cdots, h_n \in X)$.

Ne segue, dalla formula di Cauchy, che le funzioni $f_n(x_0 + \alpha_1 h_1 + \cdots$ $\cdots + \alpha_n h_n)$ sono equicontinue in $D(x_0, h_1, \cdots, h_n)$. Da ciò si ha che le stesse convergono, pure uniformemente sui compatti, a $f(x_0 + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n)$. Ne viene che f_n converge a f G–analitica in Ω, uniformemente sugl'insiemi finitamente compatti.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. PISANELLI, *Sur une généralisation du théorème de Montel aux espaces LN**. Boletim da « Sociedade de Matemática de Sao Paulo », *17*, fasc. 1º e 2º, dez. (1962).

[2] D. PISANELLI, *Contribuição ao estudo dos operadores analíticos*, Tese de Livre-Docência, Boletim da « Sociedade de Matemática de São Paulo », *16* (1961).

[3] HILLE, *Functional Analysis and Semigroups*, « Amer. Math. Soc. » (1948).

[4] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. I, « Actualités Scientifiques e Industrielles », Hermann e Cie Editeurs (1953).