Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ferruccio Fontanella

Maggiorazione dell'errore in una formula di approssimazione di L. Merli per alcune classi di funzioni continue

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.1, p. 9–12.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_1_9_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Analisi numerica. — *Maggiorazione dell'errore in una formula di approssimazione di L. Merli per alcune classi di funzioni continue* (*). Nota di FERRUCCIO FONTANELLA, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — An error bound is given for a polynomial approximation formula considered by L. Merli.

Assegnata una funzione $f(x)$, continua in $[-1, 1]$, e costruito il polinomio interpolante di Hermite

$$H_n[f(x), x] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, h_k(x), \tag{1}$$

dove

$$h_k(x) = v_k(x)\,[l_k(x)]^2, \tag{2}$$

con

$$v_k(x) = 1 - (x - x_k)\,\omega_n''(x_k)/\omega_n'(x_k), \tag{3}$$

$$l_k(x) = \omega_n(x)/[\omega_n'(x_k)\,(x - x_k)], \tag{4}$$

$$\omega_n(x) = c\,(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n), \qquad c = \text{costante},$$

e dove $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sono i punti fondamentali dell'interpolazione, è noto [1] che, nell'ipotesi che i punti fondamentali siano gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie

$$T_n(x) = A\cos n\theta = 0, \quad A = \text{costante}, \quad x = \text{arc}\cos\theta, \tag{5}$$

$$x_k = \cos[(2k-1)\pi/2n], \tag{6}$$

vale

$$\lim_{n\to\infty} H_n[f(x), x] = f(x), \tag{7}$$

uniformemente in $[-1, 1]$.

E. Moldovan [2] ha dato una valutazione della rapidità di convergenza della (7) e, più precisamente, ha dimostrato che

$$\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - H_n[f(x), x]| \le 2\pi\omega(f(x), n^{-1}\log n), \tag{8}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R. per l'anno 1969.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1969.

dove, [3], la funzione $\omega(f(x), \delta)$

$$\omega(f(x), \delta) = \sup_{|x-x'|\leq\delta} |f(x) - f(x')|, \qquad x, x' \in [-1, 1],$$

è il modulo di continuità della $f(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

Nell'ipotesi che $f(x)$ sia lipschitziana di ordine α in $[-1, 1]$, sia tale cioè che

$$|f(x) - f(x')| \leq L |x - x'|^\alpha \qquad \begin{array}{l} x, x' \in [-1, 1] \\ 0 < \alpha \leq 1, \\ L \text{ costante}, \end{array}$$

dalla (8) si ha subito [4]

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - H_n[f(x), x]| \leq 2\pi L (n^{-1} \log n)^\alpha \text{ (1)}. \tag{9}$$

In una sua Nota L. Merli [6] ha dato il seguente teorema:

Siano $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{n+p}$, con $p \geq 0$ fissato, $(n+p)$ punti dell'intervallo $[-1, 1]$ con

$$-1 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_{n+p} < 1$$

e siano $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n punti, dello stesso intervallo, con

$$-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1,$$

per i quali risulti, nel relativo polinomio di Hermite (1), $h_k(x) \geq 0$, per $k = 1, 2, \cdots, n$; $n = 1, 2, \cdots$; $x \in [-1, 1]$, valga la (7) uniformemente in $[-1, 1]$, ed inoltre, scelto un $\varepsilon > 0$ ed arbitrario, esista un n_0 tale che, per $n > n_0$, risulti

$$|x_k - \bar{x}_{k+s}| < \varepsilon \qquad s = 0, 1, \cdots, p; \; k = 1, 2, \cdots, n. \tag{10}$$

Posto allora

$$H_n^*[f(x), x] = \sum_{k=1}^{n} h_k(x) [f(\bar{x}_k) + f(\bar{x}_{k+1}) + \cdots + f(\bar{x}_{k+p})]/(p+1), \tag{11}$$

si ha, uniformemente in $[-1, 1]$,

$$\lim_{n\to\infty} H_n^*[f(x), x] = f(x). \tag{12}$$

Scopo di questa nota è di valutare, con esplicita maggiorazione, la rapidità di convergenza della (12) per alcune classi di punti $\{\bar{x}_k\}$ per cui è valido il teorema di L. Merli.

(1) Si noti che la (9) è migliore del risultato ottenuto, per $\alpha = 1$, da O. Shisha e B. Mond in [5].

Si consideri la differenza

$$f(x) - \mathrm{H}_n^* [f(x), x] = \sum_{k=1}^{n} \{f(x) - [f(\bar{x}_k) + f(\bar{x}_{k+1}) + \cdots + f(\bar{x}_{k+p})]/(p+1)\} \, h_k(x) \cdot$$

$$|f(x) - \mathrm{H}_n^* [f(x), x]| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x) - f(x_k)| \, h_k(x) +$$

$$+ \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{p} |f(x_k) - f(\bar{x}_{k+s})| \, h_k(x) \right\} \Big/ (p+1) .$$

Siano, inoltre, i punti $\{x_k\}$, gli zeri, (6), del polinomio di Tchebycheff di prima specie.

Ricordando la (10) si ha, se la $f(x)$ è continua

$$|f(x_k) - f(\bar{x}_{k+s})| \leq \omega(f(x), \varepsilon) ,$$

e se la $f(x)$ è lipschitziana di ordine α, si ha

$$|f(x_k) - f(\bar{x}_{k+s})| \leq \mathrm{L}\varepsilon^{\alpha} .$$

Tenendo presenti la (8) e la (9) e ricordando che

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) \equiv 1 ,$$

si ha, con la sola ipotesi della continuità della $f(x)$,

$$|f(x) - \mathrm{H}_n^* [f(x), x]| \leq 2\pi\omega(f(x), n^{-1} \log n) + \omega(f(x), \varepsilon) \, p/(p+1), \tag{13}$$

e se la $f(x)$ è lipschitziana di ordine α, si ha

$$|f(x) - \mathrm{H}_n^* [f(x), x]| \leq 2\pi \mathrm{L} (n^{-1} \log n)^{\alpha} + \varepsilon^{\alpha} \mathrm{L} p/(p+1) . \tag{14}$$

i) Si considerino ora, quali punti del sistema $\{\bar{x}_k\}$, gli zeri del polinomio di Jacobi $\mathrm{P}(1/2, 1/2, x)$, il polinomio cioè $\operatorname{sen} \theta (n+p+1)/\operatorname{sen} \theta$; tali zeri hanno la forma

$$\bar{x}_{k+s} = \cos [\pi (k+s)/(n+p+1)] .$$

È facile verificare che, essendo, come già detto, i punti $\{x_k\}$ gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie, si ha

$$|\bar{x}_{k+s} - x_k| \leq \frac{\pi}{n} \, |k/\mathrm{A} - k + s/\mathrm{A} + 1/2| , \tag{15}$$

dove $\mathrm{A} = 1 + (p+1)/n$.

ii) Se i punti del sistema $\{\bar{x}_k\}$ sono gli zeri del polinomio di Jacobi $\mathrm{P}(-1/2, 1/2, x)$, del polinomio cioè $[\cos \theta (2n+1)/2]/[\cos \theta/2]$, si ha

$$\bar{x}_{k+s} = \cos [\pi (2k + 2s - 1)/(2n + 2p + 1)] ,$$

ed allora

$$|\bar{x}_{k+s} - x_k| \leq \frac{\pi}{n} \, |k/\mathrm{B} - k + (2s-1)/\mathrm{B} + 1/2| , \tag{16}$$

dove $\mathrm{B} = 1 + (2p+1)/2n$.

iii) Se gli $\{\bar{x}_k\}$ sono gli zeri del polinomio di Jacobi $\mathrm{P}(1/2\,,\,-1/2\,,\,x)$, cioè di $[\mathrm{sen}\,\theta\,(2\,n+1)/2]/[\cos\,\theta/2]$, si ha

$$\bar{x}_{k+s} = \cos\,[\pi\,(2\,k+2\,s)/(2\,n+2\,p+1)]\,,$$

ed allora

$$|\,\bar{x}_{k+s} - x_k\,| \leq \frac{\pi}{n}\,|\,k/\mathrm{B} - k + 2\,s/\mathrm{B} + 1/2\,|\,, \tag{17}$$

dove $\mathrm{B} = 1 + (2\,p+1)/2\,n$.

In conclusione le (15), (16), (17) permettono, per le classi di punti sopra considerate, di eliminare ε dalle (13) e (14), ed ottenere così maggiorazioni esplicite dell'errore in funzione di n.

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. FEJÉR, *Über Interpolation*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, « Math.-Phys. Kl. », 66–91 (1916).

[2] E. MOLDOVAN, *Observatii asupra unor procedee de interpolare generalizate*, Acad. Repub. Pop. Romine, « Bull. Sti. Sect., Mat. Fiz. », *6*, 477–482 (1954).

[3] G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte II, 66 sgg. Bologna 1952.

[4] G. SANSONE, *Op. cit.* in [3], 68.

[5] O. SHISHA e B. MOND, *The rapidity of convergence of the Hermite-Fejér approximation to functions of one or several variables*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 1269–1276 (1965).

[6] L. MERLI, *Una nuova classe di polinomi di approssimazione*, « Rend. Acc. Lincei (Cl. Sc. Fis. Mat. Nat.) », (8), *38*, 2, 162–165 (1965).