
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PIETRO CALOI

**L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. -
IV. Limiti d'insorgenza delle onde di Somigliana; loro
esclusiva formazione nel piano principale**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.1, p. 45-52.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_1_45_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geofisica. — *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana.* —
 IV. *Limiti d'insorgenza delle onde di Somigliana; loro esclusiva formazione nel piano principale.* Nota (*) del Socio PIETRO CALOI.

SUMMARY. — Formation conditions of Somigliana waves (whether of those arising from compressional wave incidence — PL waves — or of $C_{i,j}$, originated by SV wave incidence) are discussed.

It is proved that Somigliana waves cannot arise from SH wave incidence.

1. — È già stato provato [1, 2] che l'equazione di Rayleigh ammette radici reali maggiori dell'unità solo per valori di σ compresi fra 0 e 0,26305. In corrispondenza di quest'ultimo valore di σ , le radici reali maggiori dell'unità coincidono nel valore 3,5754. Per valori di σ fra 0,26305 e 0,5, l'equazione di Rayleigh ha una sola radice reale: quella minore dell'unità (e alla quale corrispondono, com'è noto, le così dette onde di Rayleigh). Le altre due radici, divengono complesse.

C'è da chiedersi, sulla base dell'esperienza, se ad ogni radice maggiore dell'unità corrispondono realmente onde di Somigliana. Teoricamente, ciò dovrebbe verificarsi quando, per il rapporto di Poisson, valgono i limiti

$$0 < \sigma < 0,26305.$$

In realtà, per quanto riguarda la Terra, il limite è ben più ristretto. Sappiamo che σ ben difficilmente scende a valori minori di 0,25 ⁽¹⁾. Per cui, in pratica, le radici, cui corrispondono angoli efficaci, sono quelle fornite dall'equazione di Rayleigh per il seguente campo di variabilità di σ :

$$0,25 < \sigma < 0,26305.$$

A questo punto, sorge un'altra domanda. Il valore maggiore dell'unità della radice reale è motivo sufficiente per la creazione di onde superficiali di tipo Somigliana?

La risposta richiede la consultazione delle espressioni che gli spostamenti, legati a queste onde, assumono in superficie (o, meglio, negli strati superficiali).

Si è visto [1] che, indicando con $u_1, w_1; u_2, w_2$ rispettivamente, le componenti orizzontale e verticale delle onde longitudinale (indice 1) e trasversale (indice 2), cui si deve l'insorgenza — nel loro accoppiarsi — di onde di Somigliana, si può scrivere

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 \varphi(\alpha_1 x + \gamma_1 z - p_1 t) & , & & u_2 &= \gamma_2 \psi(\alpha_2 x + \gamma_2 z - p_2 t) \\ w_1 &= \gamma_1 \varphi(\alpha_1 x + \gamma_1 z - p_1 t) & , & & w_2 &= -\alpha_2 \psi(\alpha_2 x + \gamma_2 z - p_2 t). \end{aligned}$$

(*) Presentata nella seduta dell'11 gennaio 1969.

(1) Sebbene, in caso di rocce singole, si siano trovati valori fino a 0,1 [3].

Posto

$$\zeta_1 = \alpha_1 x + \gamma_1 z - p_1 t, \quad \zeta_2 = \alpha_2 x + \gamma_2 z - p_2 t,$$

la confluenza delle funzioni φ e ψ , caratteristiche dei due tipi d'onda spaziali sopra accennati, verso una funzione unificatrice delle loro caratteristiche, si ottiene ponendo

$$\varphi(\zeta_1) = A\Phi(\zeta_1/\alpha_1)$$

$$\psi(\zeta_2) = B\Phi(\zeta_2/\alpha_2)$$

Ricordando che

$$\frac{p_1}{\alpha_1} = (v_3)_1, \quad \frac{p_2}{\alpha_2} = (v_3)_2$$

esprimono le velocità superficiali dei due tipi d'onda e che

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \operatorname{tg} e_1, \quad \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \operatorname{tg} e_2,$$

essendo e_1, e_2 i relativi angoli d'emergenza, si ottiene ([1], pag. 228)

$$A = \frac{1}{2\alpha_1^2 \operatorname{tg} e_1}, \quad B = \frac{1}{\alpha_2^2(1 - \operatorname{tg}^2 e_2)}.$$

Avremo pertanto, prima dell'interferenza dei due tipi d'onda,

$$u_1 = \frac{1}{2\alpha_1 \operatorname{tg} e_1} \Phi(x + z \operatorname{tg} e_1 - (v_3)_1 t) \quad u_2 = \frac{\operatorname{tg} e_2}{\alpha_2(1 - \operatorname{tg}^2 e_2)} \Phi(x + z \operatorname{tg} e_2 - (v_3)_2 t)$$

$$w_1 = \frac{1}{2\alpha_1} \Phi(x + z \operatorname{tg} e_1 - (v_3)_1 t) \quad w_2 = -\frac{1}{\alpha_2(1 - \operatorname{tg}^2 e_2)} \Phi(x + z \operatorname{tg} e_2 - (v_3)_2 t)$$

Ma in superficie ($z = 0$)

$$(v_3)_1 = (v_3)_2 = v_3,$$

per cui, posto $u_0 = u_1 + u_2, w_0 = w_1 + w_2$, per $z = 0$ avremo

$$(I) \quad \begin{cases} u_0 = \left[\frac{1}{2\alpha_1 \operatorname{tg} e_1} + \frac{\operatorname{tg} e_2}{\alpha_2(1 - \operatorname{tg}^2 e_2)} \right] \Phi(x - v_3 t) \\ w_0 = \left[\frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2(1 - \operatorname{tg}^2 e_2)} \right] \Phi(x - v_3 t) \end{cases}$$

che rappresentano il risultato dell'unificazione delle coppie di onde spaziali φ e ψ nell'onda superficiale $\Phi(x - v_3 t)$, che nasce appunto dalla loro sovrapposizione.

Dalle (I) consegue:

$$(2) \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{u_0}{w_0} - \frac{1}{\operatorname{tg} e_1}}{\frac{u_0}{w_0} + \operatorname{tg} e_2} (1 - \operatorname{tg}^2 e_2).$$

Ricordiamo [1] che

$$(3) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg}^2 e_1 &= \frac{v_3^2}{v_1^2} - 1 = \frac{v_3^2}{v_2^2} \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 = \chi \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 \\ \operatorname{tg}^2 e_2 &= \frac{v_3^2}{v_2^2} - 1 = \chi - 1, \end{aligned}$$

dove per χ si deve intendere una delle due radici reali dell'equazione di Rayleigh, maggiori dell'unità.

Dall'equazione di condizione [1]

$$(3') \quad [\lambda + (\lambda + 2\mu) \operatorname{tg}^2 e_1] (1 - \operatorname{tg}^2 e_2) = 4\mu \operatorname{tg} e_1 \operatorname{tg} e_2,$$

consegue che dev'essere

$$(4) \quad \operatorname{tg} e_1 = \pm \sqrt{\chi \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1}, \quad \operatorname{tg} e_2 = \mp \sqrt{\chi - 1},$$

cioè, come è già stato osservato ([1], p. 230) soddisfano l'equazione di Rayleigh solo accoppiamenti formati da una longitudinale diretta con la propria trasversale riflessa o da una trasversale diretta con la relativa riflessa longitudinale; il che del resto è richiesto dalle condizioni iniziali della teoria di Somigliana (vedi [1], p. 227, formula (3)).

Pertanto, le (1) devono scriversi

$$(5) \quad \begin{cases} u_0 = \left[\pm \frac{1}{2\alpha_1 \sqrt{\chi \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1}} \mp \frac{\sqrt{\chi - 1}}{\alpha_2 (2 - \chi)} \right] \Phi(x - v_3 t) \\ w_0 = \left[\frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 (2 - \chi)} \right] \Phi(x - v_3 t). \end{cases}$$

Ora, se la $\Phi(x - v_3 t)$ è funzione periodica oscillante fra $-a$ e $+a$, mentre $2U_0$ e $2W_0$ sono le ampiezze assegnate per u_0, w_0 rispettivamente, per determinare α_1, α_2 avremo le equazioni lineari

$$(6) \quad \begin{cases} \left[\pm \frac{1}{2\alpha_1 \sqrt{\chi \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1}} \mp \frac{\sqrt{\chi - 1}}{\alpha_2 (2 - \chi)} \right] a = U_0 \\ \left(\frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 (2 - \chi)} \right) a = W_0, \end{cases}$$

che potranno servire allo scopo *purché* il determinante dei coefficienti di $1/\alpha_1$ e $1/\alpha_2$ sia diverso da zero.

Quando $\Phi(x - v_3 t)$ non è periodica, il rapporto α_1/α_2 può essere determinato con la (2), tenuto debito conto delle (4).

2. - È noto che il valore di σ , per gli strati superficiali della crosta terrestre, non differisce molto da 0,25. B. Gutenberg [4] lo valuta fra 0,25 e 0,27 per profondità fino a 50 Km., assumendo per tale profondità un valore medio di 0,26.

Nel caso $\sigma = 1/4$ l'equazione di Rayleigh fornisce per χ reale (maggiore di 1) i due valori

$$\chi = \frac{v_3^2}{v_2^2} = \begin{cases} 4 \\ 3,1547. \end{cases}$$

Nel caso di onda incidente longitudinale, il determinante dei coefficienti di $1/\alpha_1, 1/\alpha_2$ è - com'è facile vedere -

$$(7) \quad \frac{1}{2(2-\chi)} \left[-\frac{1}{\sqrt{\chi \frac{v_3^2}{v_1^2} - 1}} + \sqrt{\chi - 1} \right]$$

(e analogamente per incidenza trasversale, salvo lo scambio dei segni).

Si verifica subito che, per $\chi = \frac{v_3^2}{v_2^2} = 4$, il sistema (6) cade in difetto, in quanto il determinante si annulla; pertanto si annullano pure α_1, α_2 . In altri termini, per $\sigma = 1/4$, l'onda di Somigliana si forma *solo* in corrispondenza di

$$\chi = \frac{v_3^2}{v_2^2} = 3,1547.$$

Generalmente, quindi, i valori di χ , per i quali possono attendersi onde di Somigliana, possono variare fra 3,1547 per $\sigma = 1/4$ e 3,5754 per $\sigma = 0,26305$. Le velocità apparenti v_3 di tali onde devono pertanto risultare *sempre* inferiori a $2v_2$.

Per quanto concerne gli angoli efficaci, in media (sulla base dei valori ottenuti risolvendo l'equazione di Rayleigh entro i limiti 0,0 e 0,5 per σ), possiamo assumere un angolo d'incidenza dell'ordine di 73° per onde longitudinali incidenti, e un angolo d'incidenza di 33° nel caso di onde incidenti trasversali.

Nei confronti delle $C_{i,j}$, gli angoli efficaci alla base delle varie stratificazioni, non dovranno quindi differire molto dal valore di 33° . Ciò richiede una distanza di formazione delle $C_{2,1}; C_{1,1}; C_{0,1}$ via via crescente, come di fatto si verifica. Per onde di Somigliana nascenti per incidenza di onde longitudinali - a meno di casi particolari - le distanze di formazione si presenteranno decisamente minori.

3. - Ritengo superfluo soffermarmi ancora sulla effettiva coincidenza delle onde PL (Tav. I) e $C_{i,j}$ con quelle che io chiamo le onde di Somigliana: su tale argomento, mi sono già soffermato in precedenti lavori [2, 5, 6, 7, 8],

in alcuni dei quali ho pure riportato il valore che compete agli angoli efficaci, per la formazione di dette onde nelle stratificazioni della crosta terrestre. Che l'interpretazione riportata nei lavori citati risponda al vero, è provato dalle velocità apparenti ottenute per le onde $C_{2,j}$; $C_{1,j}$; $C_{0,j}$ che nascono alla base del granito, dell'intermedio e della crosta terrestre, rispettivamente. Tali velocità sono risultate conformi alla teoria: 6,4; 7,5; 8,4 Km/sec [5, 7, 8].

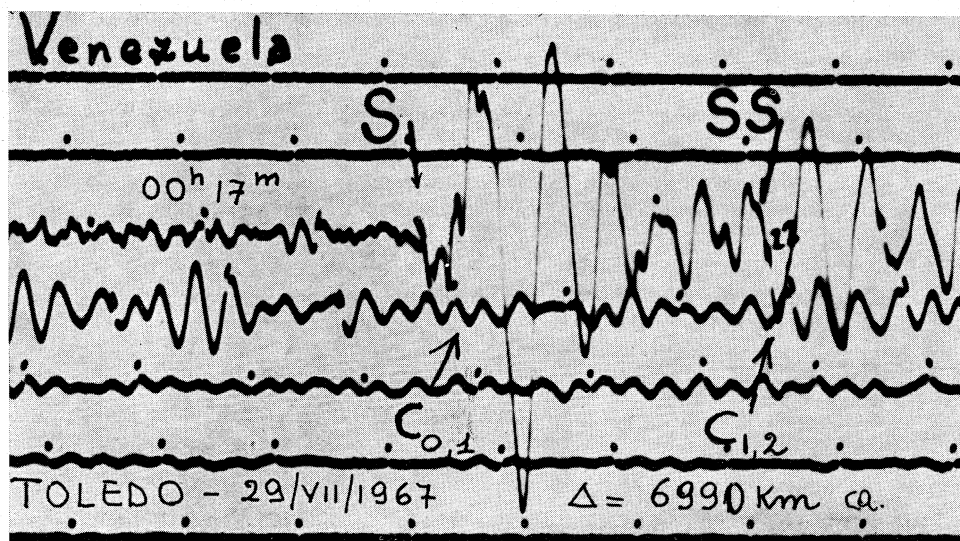


Fig. 1. - Quando gli angoli efficaci vengono raggiunti in zone continentali, si hanno ampie registrazioni di onde $C_{i,j}$, come per il terremoto del Venezuela del 29 luglio 1967, registrato a Toledo, e di cui la figura dà un tratto di registrazione della componente EW.

Un'altra conferma era fornita dalle registrazioni di onde $C_{i,j}$ ottenute in isole oceaniche, dove ci si doveva aspettare un periodo nettamente inferiore a quello registrato in stazioni continentali (fig. 1), come di fatto si è a più riprese osservato [6]. A questo proposito, c'era da attendersi la quasi scomparsa di dette onde in registrazioni eseguite sul fondo degli Oceani. Anche di ciò si è avuto testimonianza (Tav. II). Infine, solo con la teoria di Somigliana modificata si può dar giustificazione dell'insorgere di onde a lungo periodo, associate alle onde SS, SSS... di terremoti lontanissimi, altrimenti del tutto inesplicabili. Molto spesso le $C_{0,2}$ associate alle SS in terremoti del genere, costituiscono - come nella fig. 2 - la fase di maggiore ampiezza di tutto un sismogramma.

4. - Termino con ulteriori rettifiche sulla teoria di Somigliana, quale fu esposta nel 1917.

Abbiamo già rilevato, nel 1942 [1], alcune sviste e valutazioni erranee, sfuggite a Somigliana nello sviluppo della sua teoria. Un'altra affermazione erronea riguarda il determinante della (6), che Somigliana ([9], p. 476) asserisce essere sempre diverso dallo zero. Nel caso più comune di $\sigma = 1/4$, i

valori di χ superiori all'unità sono, come abbiamo visto, 4 e 3,1547 rispettivamente. Ebbene, per $\chi = 4$, come si è già osservato, il determinante (7) si annulla. Anche questo errore deriva dalla errata interpretazione data da Somigliana all'equazione di condizione (3').

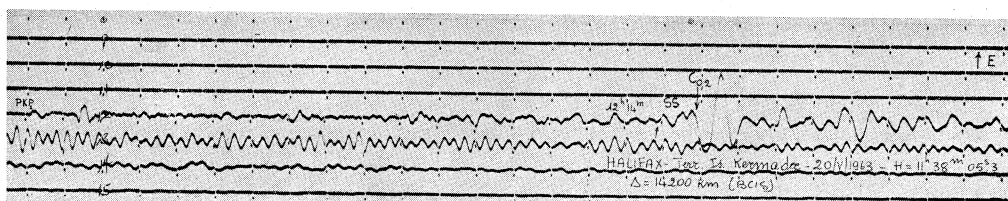


Fig. 2. - La teoria esposta giustifica anche la formazione delle onde lunghe, associate alle SS, SSS, ... per grandi distanze epicentrali, altrimenti del tutto inesplicabili. Nell'esempio sopra riportato - come del resto sovente accade - le $C_{0,2}$ costituiscono la fase più ampia dell'intero sismogramma. Ciò sta a provare che le onde $C_{i,j}$ hanno il carattere di oscillazioni libere delle stratificazioni della crosta terrestre, alla base delle quali prendono origine [2,7].

Ma non terminano qui le conseguenze di quell'errata interpretazione.

Com'è noto, le onde superficiali non provocano solo movimenti nel piano di propagazione. Specie all'inizio delle così dette onde lunghe, l'osservazione rivela l'esistenza di notevoli movimenti ondulatori anche nella direzione normale alla direzione di propagazione (anzi generalmente, *soltanto* in questa direzione). Allo scopo di dare un carattere generale, unitario alla sua teoria sulle onde superficiali, oltre ai sistemi di vibrazione rappresentanti le onde longitudinali e trasversali oscillanti nel piano principale, Somigliana introduce un terzo sistema di vibrazione, normale al piano di propagazione, rappresentato da ([9], p. 478)

$$(8) \quad \begin{aligned} u_3 &= 0 \\ \bar{v}_3 &= \eta (\alpha_3 x + \gamma_3 z - \varepsilon_3 t) \\ w_3 &= 0, \end{aligned}$$

dove η è una funzione arbitraria e ε_3 una costante.

Sicché l'onda piana più generale, dovrebbe risultare dalla sovrapposizione di tre sistemi di vibrazioni e avere quindi per componenti:

$$u = u_1 + u_2 + u_3, \quad \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3, \quad w = w_1 + w_2 + w_3.$$

Nella teoria di Somigliana, le costanti della (8) dovrebbero soddisfare alla condizione

$$v_2^2 (\alpha_3^2 + \gamma_3^2) = \varepsilon_3^2,$$

e, alla superficie, cioè per $z = 0$,

$$(9) \quad \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial z} = 0.$$

Fatto

$$\frac{e_3}{\alpha_3} = v_2 \sqrt{\chi} \quad \text{e quindi} \quad \left(\frac{\gamma_3}{\alpha_3}\right)^2 = \chi - 1,$$

dove χ indica una qualunque delle radici dell'equazione di Rayleigh, maggiori dell'unità, ponendo

$$(10) \quad \bar{v}_3 = \eta (\sqrt{\chi - 1} \cdot z + x - v_2 \sqrt{\chi} t) + \eta (-\sqrt{\chi - 1} z + x - v_2 \sqrt{\chi} t),$$

sarebbero allora verificate le due condizioni a cui la $\bar{v}_3$ deve soddisfare. «Avremo così – scrive Somigliana [9] – un'onda che si propaga con velocità uguale ad una qualunque delle nostre coppie associate, e che darà luogo in superficie ad un movimento ondulatorio normale alla direzione di propagazione. Essa è composta di due onde piane; per l'una il piano d'onda coincide con quello delle onde (4') – corrispondenti alle nostre u_2, w_2 –; per l'altra con quello dell'onda riflessa ».

In realtà, le cose stanno diversamente.

Somigliana suppone che le onde superficiali nascano dall'associazione di un'onda longitudinale con un'onda trasversale, *entrambe dirette o riflesse*. A parte l'impossibilità di simili interferenze (i due tipi d'onda, infatti, si propagano con velocità diversa), abbiamo mostrato che l'equazione di condizione (3') è soddisfatta da coppie costituite da un'onda incidente longitudinale (trasversale) che interferisce con la propria riflessa trasversale (longitudinale). Tale interferenza però può avvenire *soltanto* con onde trasversali oscillanti nel piano di propagazione.

Pertanto, poiché un'onda longitudinale non può dar luogo a onde trasversali oscillanti ortogonalmente al piano di propagazione (trasversali tangenziali) e un'onda trasversale tangenziale non può originare onde riflesse longitudinali, le conclusioni di Somigliana non reggono. In altri termini, nella sua teoria – come del resto in quella originale di Rayleigh – *possono entrare solo onde oscillanti nel piano di propagazione*.

Ciò, del resto, è conforme all'osservazione [6].

In un sismogramma completo, com'è noto, le onde superficiali iniziano con oscillazioni trasversali-tangenziali, senza componente verticale (onde di Love); solo successivamente vengono registrate onde prevalentemente oscillanti nel piano verticale. La componente tangenziale che si osserva talvolta in queste onde può, in parte, essere giustificata dalla sovrapposizione di onde di Love. In ogni modo, i due treni d'onda sono ben separati, come ben diversa è la loro origine.

Caso mai, la (10) può essere considerata separatamente dalla teoria di Somigliana. Sotto questa forma, però, essa rientra (fatta astrazione dai limiti per la velocità) come caso particolare della riflessione totale di onde trasversali-tangenziali, già studiata da Zoeppritz nel 1914 e pubblicata postuma nel 1919 [10].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] P. CALOI, *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. II: La teoria di Somigliana: rettifiche, conseguenze.* «Atti Acc. Naz. dei Lincei», Classe Scienze fis., mat. e nat., Vol. XLI, ser. VIII, fasc. 5 (1966).
- [2] P. CALOI, *On the Upper Mantle*, pp. 79–211, in «Advances of Geophysics», Academic Press, New York and London, p. 127 (1967).
- [3] B. GUTENBERG, *Physics of the Earth's Interior.* pp. XII–240, Academic Press, New York and London, p. 181 (1959).
- [4] B. GUTENBERG, *Wave Velocities at Depths between 50 and 600 Kilometers*, «Bull. Seismol. Soc. of Am.», Vol. 43, p. 228 (1953).
- [5] P. CALOI, *Sur l'origine des ondes de type superficiel, associées aux ondes S, SS, SSS,...* Bureau Central Séism. Intern., Série A. Travaux Scientif., Fascicule 17 (1948). (Contiene la bibliografia dei precedenti lavori sull'argomento).
- [6] P. CALOI, « $C_{i,j}$ » «Annali di Geofisica», Vol. VIII (1955).
- [7] P. CALOI, *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. III: Le $C_{i,j}$ sono onde di Somigliana. Loro importanza per lo studio della crosta terrestre*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei», Classe Scienze fis., mat. e nat., Vol. XLIII, fasc. 6 (1967).
- [8] P. CALOI, G. ROMUALDI, *More on the Somigliana waves ($C_{i,j}$ and PL)*, «Annali di Geofisica», XXI – 3 (1968).
- [9] C. SOMIGLIANA, *Sulla propagazione delle onde sismiche. Nota II.* «Rend. R. Accademia dei Lincei», Classe Scienze fis., mat. e nat., Vol. XXVI, sez. V, fasc. 9 (1917).
- [10] K. ZOEPPRITZ, *Über Reflexion und Durchgang seismischer Wellen durch Unstetigkeitsflächen*, «Kgl. Ges. d. Wiss., Nachrichten Math.-phys. Klasse.», Göttingen 1919.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE I-II

TAVOLA I.

La profondità ipocentrale ha notevole influenza sulla formazione delle onde di Somigliana. L'onda PL, riportata in questa figura, è dovuta alla profondità ipocentrale del terremoto-origine (70 km circa) che ha consentito il raggiungimento dell'angolo efficace delle onde longitudinali in corrispondenza di Roma.

TAVOLA II.

Se la registrazione è ottenuta sul fondo dell'Oceano, dove la superficie di Mohorovičić è a pochi chilometri dal fondo, la registrazione delle $C_{i,j}$ è pressoché mancante, come nella registrazione sopra riportata, fornita da un apparecchio funzionante sul fondo del Pacifico, alla profondità di 3800 m circa, in occasione del terremoto del Venezuela del 29 luglio 1967 (ved. fig. 1).

