Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elisa Udeschini Brinis

Sulla forma Hamiltoniana delle equazioni elettromagnetiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.1, p. 33–39.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_1_33_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Fisica matematica. — *Sulla forma Hamiltoniana delle equazioni elettromagnetiche.* Nota [(*)] di ELISA UDESCHINI BRINIS, presentata [(**)] dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — By assuming as canonical variables the components of *two* potential vectors and their conjugate momentum densities, Hamiltonian function for space-time electromagnetic field is constructed and *all* electromagnetic field equations are presented in Hamiltonian form.

Nella formulazione hamiltoniana della teoria di un campo fisico spazio–temporale, accanto alle variabili di campo si introducono altrettanti momenti coniugati, definiti mediante la densità lagrangiana.

Lo «stato fisico» ad ogni dato istante è descritto mediante le due serie di variabili canoniche coniugate, funzioni delle quattro coordinate spazio–temporali.

Può avvenire che le variabili canoniche non siano indipendenti, ma legate da «equazioni di vincolo» (come nei casi notevoli del campo gravitazionale einsteiniano e di quello elettromagnetico nello spazio–tempo); sono noti, in tal caso, metodi per generalizzare la teoria hamiltoniana [(1)].

Così, seguendo Dirac, mentre alcune equazioni di vincolo vanno unite alle equazioni hamiltoniane di campo, si può approfittare di altre equazioni di vincolo per ridurre il numero dei gradi di libertà, ossia per eliminare dalla teoria un certo numero di momenti coniugati e di altrettante variabili di campo (introducendo però delle funzioni arbitrarie nella hamiltoniana). La presenza delle funzioni arbitrarie è legata al gruppo di trasformazioni rispetto a cui la teoria è invariante e rispecchia la possibilità di rappresentare lo stesso stato fisico in modi diversi.

Si può dare forma hamiltoniana alla teoria spazio–temporale del campo elettromagnetico nel vuoto [(2)], facendo dipendere la densità lagrangiana $\mathfrak{L}$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1969.

(1) P. A. M. DIRAC, *Generalized Hamiltonian dynamics*, «Proc. Roy. Soc. of London», A 246, 326 (1958).

J. L. ANDERSON and P. G. BERGMANN, *Constraints in Covariant Field Theories*, «Phys, Rev.», *83*, 5, 1018 (1951).

J. WEBER, *General Relativity and Gravitational Waves*. Interscience Publ. New York 1961.

P. UDESCHINI, *Sulla forma hamiltoniana della teoria einsteiniana della gravitazione* «Rendic. del Seminario Mat. e Fis. di Milano», XXXVIII (1968).

(2) J. L. ANDERSON, *Quantization of general relativity*, in *Gravitation and Relativity*. W. A. Benjamin, New York 1964.

C. G. OLIVEIRA, *Two–component Spinors in the Hamiltonian Formulation of General Relativity*, «Suppl. Nuovo Cimento», III, 2 (1965).

da un potenziale vettore spazio–temporale ed assumendo come variabili canoniche le quattro componenti del potenziale elettromagnetico ed i rispettivi momenti coniugati.

Introdurre un solo potenziale vettore elettromagnetico equivale, però, ad ammettere a priori la irrotazionalità del tensore elettromagnetico (ossia due delle equazioni di Maxwell): si inquadra così nello schema hamiltoniano solo una parte delle equazioni di Maxwell.

In questa Nota mostro che, facendo dipendere il tensore elettromagnetico da *due* potenziali vettori spazio–temporali (3) e assumendo come variabili canoniche le componenti dei due potenziali elettromagnetici ed i rispettivi momenti coniugati, si inquadrano nello schema hamiltoniano *tutte* le equazioni del campo elettromagnetico, togliendo ogni carattere di privilegio ad una parte di esse nei confronti delle rimanenti.

Espressa la densità lagrangiana $\mathfrak{L}$ mediante due potenziali spazio–temporali q^α e χ^α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ e definiti i rispettivi momenti coniugati $p_\alpha = \partial\mathfrak{L}/\partial\dot{q}^\alpha$ e $\pi_\alpha = \partial\mathfrak{L}/\partial\dot{\chi}^\alpha$ (dove il punto indica derivazione rispetto alla coordinata temporale), si ottengono due *vincoli primari* $p_0 = 0$ e $\pi_0 = 0$, in virtù dei quali si possono eliminare dalla teoria, come variabili di campo, le componenti temporali dei potenziali q^0 e χ^0 che compaiono però come funzioni arbitrarie nell'espressione dell'hamiltoniana. Ciò è conforme al fatto che ognuno dei due potenziali è definito a meno del gradiente di una funzione arbitraria («invarianza di gauge»).

Le variabili canoniche si riducono così alle dodici componenti spaziali q^i, χ^i, p_i e π_i $(i = 1, 2, 3)$ dei potenziali e dei momenti coniugati. Tali variabili non sono però indipendenti, ma legate da due ulteriori equazioni di vincolo (*vincoli secondari*) che vanno affiancate alle equazioni hamiltoniane di campo. Queste ultime si costruiscono valendosi della densità hamiltoniana che risulta somma di una parte funzione delle sole variabili canoniche q^i, χ^i, p_i e π_i e di una parte che rappresenta una combinazione lineare dei due vincoli secondari, ove fungono da coefficienti arbitrari le funzioni q^0 e χ^0.

Interpretando poi i risultati nell'ordinario spazio tridimensionale, si trova che i momenti coniugati dei potenziali vettori spaziali **A** e **K** si identificano con i vettori forza elettrica e magnetica **E** ed **H**; i due vincoli secondari si identificano con due equazioni di Maxwell, mentre le equazioni hamiltoniane di campo forniscono le rimanenti equazioni di Maxwell insieme alle relazioni che legano i vettori **E** ed **H** ai potenziali vettori e scalari del campo.

(3) B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*, «Questi Rendiconti», *12*, 4 (1952).

Cfr. anche: J. L. SYNGE, *Relativity - The special theory*. North–Holland Publ. Company. Amsterdam (1965) p. 412. E. UDESCHINI BRINIS, *Campi fisici bivettoriali e loro genesi variazionale*, «Questi Rendiconti», *39*, 5 (1965).

1. – EQUAZIONI HAMILTONIANE NELLO SPAZIO-TEMPO.

Nello spazio-tempo pseudoeuclideo della relatività ristretta, sia $F_{\alpha\beta}$ il tensore doppio emisimmetrico atto ad individuare il campo elettromagnetico nel vuoto e sia j^α il vettore distribuzione elettrica $(\alpha, \beta \cdots = 0, 1, 2, 3)$.

Se non si fa nessuna ipotesi sul tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$, questo si può esprimere mediante due potenziali vettori q^α e χ^α:

$$F_{\alpha\beta} = q_{\beta/\alpha} - q_{\alpha/\beta} + i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\chi^{\gamma/\delta} \qquad (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{tensore di Ricci}) \tag{1.1}$$

entrambi definiti a meno del gradiente di una funzione arbitraria (4).

Considerata la densità lagrangiana:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta} - j_\alpha\, q^\alpha \tag{1.2}$$

assumiamo come prima serie di variabili canoniche, atte a caratterizzare, nello schema hamiltoniano, il campo elettromagnetico nel vuoto, le otto componenti dei due potenziali elettromagnetici q^α e χ^α e come variabili coniugate i momenti densità p_α e π_α definiti dalle:

$$\left\{\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \\ \pi_\alpha &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\chi}^\alpha} \end{aligned}\right. \qquad \text{con: (5)} \qquad \left\{\begin{aligned} \dot{q}^\alpha &\equiv \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^0} \equiv q^\alpha_{,0} \equiv q^\alpha_{/0} \equiv q^{\alpha/0} \\ \dot{\chi}^\alpha &\equiv \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^0} \equiv \cdots \end{aligned}\right. \tag{1.3}$$

Essendo, per le (1.1) ed (1.2):

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}(q_{\beta/\alpha} - q_{\alpha/\beta})\, q^{\beta/\alpha} - \frac{1}{2}(\chi_{\varrho/\sigma} - \chi_{\sigma/\varrho})\, \chi^{\varrho/\sigma} + i\,\varepsilon_{\alpha\beta\varrho\sigma}\, q^{\beta/\alpha}\, \chi^{\varrho/\sigma} - j_\alpha\, q^\alpha \tag{1.2'}$$

le (1.3) danno:

$$\left\{\begin{aligned} p_\alpha &= q_{\alpha/0} - q_{0/\alpha} + i\,\varepsilon_{0\alpha\varrho\sigma}\, \chi^{\varrho/\sigma} \\ \pi_\alpha &= \chi_{0/\alpha} - \chi_{\alpha/0} + i\,\varepsilon_{\alpha 0\sigma\varrho}\, q^{\varrho/\sigma} \end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

o anche, separando gli indici spaziali dall'indice temporale (6):

$$\left\{\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ \pi_0 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{1.4'}$$

$$\left\{\begin{aligned} p_k &= q_{k/0} - q_{0/k} + i\,\varepsilon_{0klm}\, \chi^{l/m} \\ \pi_k &= \chi_{0/k} - \chi_{k/0} + i\,\varepsilon_{0klm}\, q^{l/m}\,. \end{aligned}\right. \tag{1.4''}$$

(4) Senza alterare $F_{\alpha\beta}$ si possono sostituire ai potenziali q_β e χ^γ i potenziali:

$$q'_\beta = q_\beta + \lambda_{/\beta} \qquad \chi'^\gamma = \chi^\gamma + \eta^{/\gamma}$$

con λ e η funzioni arbitrarie, disponendo delle quali si possono imporre le condizioni di gauge.

Nella formula (1.1) si è introdotta l'unità immaginaria i per far sì che anche il potenziale χ^γ sia reale.

La barretta che precede un indice indica derivazione tensoriale.

(5) La virgola che precede un indice indica derivazione ordinaria. Poiché operiamo nel riferimento che dà alla metrica la forma pseudopitagorica: $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = dx^{0^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2})$, la derivazione ordinaria coincide con la derivazione tensoriale.

(6) Indicheremo sempre con lettere greche gli indici che assumono i valori 0,1,2,3 e con lettere latine quelli che assumono solo i valori 1, 2, 3.

Le (1.4′) costituiscono due vincoli primari e la presenza di tali vincoli è conforme al fatto che entrambi i potenziali sono definiti a meno del gradiente di una funzione arbitraria (invarianza di gauge).

In virtù della forma particolarmente semplice dei vincoli (1.4′), il numero dei gradi di libertà si riduce da otto a sei: le variabili q^0 e χ^0, coniugate di p_0 e π_0, non sono vincolate dalle equazioni hamiltoniane, ma figurano come funzioni arbitrarie [7].

Dalle (1.4″) è possibile ricavare le $\dot{q}^k$ e $\dot{\chi}^k$ in funzione delle variabili canoniche e costruire la hamiltoniana H:

$$\mathrm{H} = \int \mathcal{H} \, d^3 x \tag{1.5}$$

essendo $d^3x = dx^1 \, dx^2 \, dx^3$ l'elemento di volume della regione spaziale (ipersuperficie $x^0 = \text{cost}$) in cui il campo è definito ad ogni istante ed $\mathcal{H}$ la densità hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = p_k \, \dot{q}^k + \pi_k \, \dot{\chi}^k - \mathcal{L} \, . \tag{1.6}$$

Con alcuni calcoli che riassumo brevemente, tenendo conto delle (1.4″) ed (1.2′), si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = {} & p_k \, p^k + p_k \, q^{0/k} - i \, \varepsilon^{0k}{}_{lm} \, p_k \, \chi^{l/m} - \pi_k \, \pi^k + \pi_k \, \chi^{0/k} + i \, \varepsilon^{0k}{}_{lm} \, \pi_k \, q^{l/m} + \\
& - \frac{1}{2} \left(q_{k/0} - q_{0/k} + i \, \varepsilon_{0khj} \, \chi^{h/j} \right) \left(q^{k/0} - q^{0/k} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\chi_{0/k} - \chi_{k/0} + i \, \varepsilon_{hjk0} \, q^{j/h} \right) \left(\chi^{0/k} - \chi^{k/0} \right) - \frac{1}{2} \, i \, \varepsilon_{0khj} \, \chi^{h/j} \left(q^{k/0} - q^{0/k} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \, i \, \varepsilon_{0khj} \, q^{h/j} \left(\chi^{0/k} - \chi^{k/0} \right) - \frac{1}{2} \left(q_{j/k} - q_{k/j} \right) q^{j/k} + \frac{1}{2} \left(\chi_{j/k} - \chi_{k/j} \right) \chi^{j/k} + j_\alpha \, q^\alpha = \\
= {} & p_k \, p^k + p_k \, q^{0/k} - i \, \varepsilon^{0klm} \, p_k \, \chi_{l/m} - \pi_k \, \pi^k + \pi_k \, \chi^{0/k} + i \, \varepsilon^{0klm} \, \pi_k \, q_{l/m} + \\
& - \frac{1}{2} \, p_k \, p^k + \frac{1}{2} \, \pi_k \, \pi^k - \frac{1}{2} \, \varepsilon_{0khj} \, \varepsilon^{0k}{}_{lm} \left(\chi^{h/j} \, \chi^{l/m} - q^{h/j} \, q^{l/m} \right) + \\
& - \frac{1}{2} \left(q_{j/k} - q_{k/j} \right) q^{j/k} + \frac{1}{2} \left(\chi_{j/k} - \chi_{k/j} \right) \chi^{j/k} + j_\alpha \, q^\alpha = \\
= {} & \frac{1}{2} \, p_k \, p^k - \frac{1}{2} \, \pi_k \, \pi^k - i \, \varepsilon^{0klm} \, p_k \, \chi_{l/m} + i \, \varepsilon^{0klm} \, \pi_k \, q_{l/m} + p_k \, q^{0/k} + \pi_k \, \chi^{0/k} + \\
& - \frac{1}{2} \left(\eta_{hl} \, \eta_{jm} - \eta_{hm} \, \eta_{lj} \right) \left(\chi^{h/j} \, \chi^{l/m} - q^{h/j} \, q^{l/m} \right) - \frac{1}{2} \left(q_{j/k} - q_{k/j} \right) q^{j/k} + \\
& + \frac{1}{2} \left(\chi_{j/k} - \chi_{k/j} \right) \chi^{j/k} + j_\alpha \, q^\alpha = \\
= {} & \frac{1}{2} \, p_k \, p^k - \frac{1}{2} \, \pi_k \, \pi^k - i \, \varepsilon^{0klm} \, p_k \, \chi_{l/m} + i \, \varepsilon^{0klm} \, \pi_k \, q_{l/m} + p_k \, q^{0/k} + \pi_k \, \chi^{0/k} + j_\alpha \, q^\alpha
\end{aligned}$$

e, poiché non si alterano le equazioni hamiltoniane aggiungendo alla densità hamiltoniana $\mathcal{H}$ la divergenza spaziale di un vettore, possiamo anche assu-

(7) Cfr. P. A. M. DIRAC, loco citato.

mere come densità hamiltoniana la:

$$(1.6') \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{2} p_k p^k - \frac{1}{2} \pi_k \pi^k - i \varepsilon^{0klm} p_k \chi_{l/m} + i \varepsilon^{0klm} \pi_k q_{l/m} + \\ + j_k q^k - q^0 (p_k{}^{/k} - j_0) - \chi^0 \pi_k{}^{/k}$$

che risulta espressa mediante le sole variabili canoniche q^k, χ^k, p_k, π_k e contiene le componenti temporali q^0 e χ^0 dei potenziali come coefficienti arbitrari.

Le equazioni hamiltoniane di campo:

$$(1.7) \qquad \begin{cases} \dot{p}_k = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta q^k} \\ \dot{\pi}_k = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta \chi^k} \\ \dot{q}^k = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta p_k} \\ \dot{\chi}^k = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta \pi_k} \end{cases}$$

dove:

$$(1.8) \qquad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta q^k} \equiv \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q^k} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q^k_{,j}} \; ; \; \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta p_k} \equiv \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{k,j}} \; ; \cdots$$

per la (1.6') risultano:

$$(1.7') \qquad \begin{cases} \dot{p}_k = -j_k + i \varepsilon_{0hkj} \pi^{h/j} \\ \dot{\pi}_k = -i \varepsilon_{0hkj} p^{h/j} \\ \dot{q}^k = p^k - i \varepsilon^{0klm} \chi_{l/m} + q^{0/k} \\ \dot{\chi}^k = -\pi^k + i \varepsilon^{0klm} q_{l/m} + \chi^{0/k} . \end{cases}$$

Le dodici variabili canoniche q^k, χ^k, p_k, π_k non sono però indipendenti perché sussistono anche dei vincoli secondari. Questi nascono dall'imporre che $\dot{p}_0$ e $\dot{\pi}_0$ si annullino, affinché i vincoli primari siano verificati durante l'evolversi nel tempo del sistema.

Essendo:

$$(1.9) \qquad \begin{cases} \dot{p}_0 = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta q^0} \\ \dot{\pi}_0 = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta \chi^0} \end{cases}$$

i due vincoli secondari risultano:

$$(1.9') \qquad \begin{cases} p_k{}^{/k} - j_0 = 0 \\ \pi_k{}^{/k} = 0 . \end{cases}$$

Le due equazioni di vincolo (1.9') vanno affiancate alle equazioni hamiltoniane di campo (1.7').

Osserviamo che la densità hamiltoniana (1.6') è costituita da una parte che è funzione delle sole variabili canoniche q^k, χ^k, p_k, π_k e da una parte che è una combinazione lineare dei due vincoli secondari, ove fungono da coefficienti le due funzioni arbitrarie q^0 e χ^0.

Come già si è fatto per i vincoli primari, imponendo che i vincoli secondari siano verificati durante l'evolversi nel tempo del sistema (annullando, cioè, la derivata rispetto al tempo dei primi membri delle (1.9')), si ottiene poi:

$$(1.10) \qquad \begin{cases} \dot{p}_k{}^{/k} - \dot{j}_0{}^{/0} = 0 \\ \dot{\pi}_k{}^{/k} = 0 \end{cases}$$

ossia, come si vede immediatamente dalle (1.7'):

$$(1.10') \qquad \begin{cases} \dot{j}_\alpha{}^{/\alpha} = 0 \\ 0 = 0 . \end{cases}$$

Si perviene così alla sola equazione di conservazione dell'elettricità e non si trovano ulteriori vincoli per la teoria.

2. – Equazioni nell'ordinario spazio tridimensionale.

Vediamo ora come i risultati stabiliti nel paragrafo precedente si possano interpretare ed esprimere mediante gli enti che individuano il campo elettromagnetico, nel vuoto, nell'ordinario spazio tridimensionale.

Dalle (1.4''), tenendo conto della (1.1), si ottiene:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} p_k = F_{0k} \\ \pi_k = {}^*F_{k0} \end{cases} \qquad \left(\text{con} \quad {}^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, i\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, F^{\gamma\delta}\right).$$

Ricordando le relazioni che intercedono fra le componenti spazio-temporali del tensore elettromagnetico e le componenti spaziali dei due vettori forza elettrica **E** e forza magnetica **H** (coincidenti nel vuoto con le rispettive induzioni), si ha quindi:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} p_k = -E_k \\ \pi_k = H_k . \end{cases}$$

Introdotti dunque due potenziali vettori spaziali **A** e **K** e due potenziali scalari α e $\varkappa$, riassunti nello spazio-tempo dai due tetravettori q^α e χ^α (8):

$$(2.3) \qquad \begin{cases} q^k = -A^k \\ q^0 = \alpha \end{cases} \qquad\qquad (2.4) \qquad \begin{cases} \chi^h = K^h \\ \chi^0 = \varkappa \end{cases}$$

i momenti coniugati dei potenziali vettori si identificano con i due vettori **E** ed **H**, mentre i potenziali scalari risultano funzioni arbitrarie.

(8) La diversa scelta di segno nella definizione di **A** e di **K**, viste le (2.2), fa sì che le (1.3) ad indici spaziali si riducano nello spazio ordinario a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{A}^k} = E_k \\ \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{K}^k} = H_k \end{cases} \qquad \left(\text{con:} \quad \dot{A}^k \equiv \frac{1}{c}\,\frac{\partial A^k}{\partial t}\,, \quad \dot{K}^h \equiv \frac{1}{c}\,\frac{\partial K^h}{\partial t}\right).$$

Poiché $j^0 = \rho$ e $j^h = \rho \frac{v^h}{c}$ (essendo ρ la densità di carica, $\rho \boldsymbol{v}$ la densità di corrente di convezione e c la velocità della luce), la densità hamiltoniana (1.6′) risulta:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} H^2 + \operatorname{rot} \mathbf{K} \times \mathbf{E} - \operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{H} + \\ + \rho \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \mathbf{A} - \alpha (\operatorname{div} \mathbf{E} - \rho) + \varkappa \operatorname{div} \mathbf{H} \tag{2.5}$$

e le equazioni hamiltoniane (1.7′) diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\dfrac{1}{c} \rho \boldsymbol{v} + \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E} \\ \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} + \operatorname{rot} \mathbf{K} + \operatorname{grad} \alpha \\ \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = \mathbf{H} - \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varkappa . \end{cases} \tag{2.6}$$

Alle (2.6) vanno associate le due equazioni di vincolo (1.9′) che risultano:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 . \end{cases} \tag{2.7}$$

Nello schema hamiltoniano proposto, si inquadrano così tutte le equazioni di Maxwell: due di esse figurano come vincoli, mentre le altre si presentano come equazioni hamiltoniane di campo. Le rimanenti equazioni di campo (2.6) esprimono la dipendenza dei due vettori **E** ed **H** dai potenziali vettori e scalari.

Si toglie in tal modo ogni carattere di privilegio ad una parte di equazioni di Maxwell nei confronti delle rimanenti, o anche al vettore **H** nei confronti del vettore **E**.