Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Lavoro delle forze intime e isotropia. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.1, p. 27–32.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_1_27_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Meccanica. — *Lavoro delle forze intime e isotropia.* Nota I di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Corrisp. C. CATTANEO.

SUMMARY. — Some contributions are made to the theory of finite deformations in general coordinates, introducing a contravariant symmetric tensor alternative to the ordinary deformation tensor, and giving the corresponding explicit formulas.

Questo studio sui continui tridimensionali, in *coordinate generali*, consta di due parti. Nella Nota I vengono coordinate alcune nozioni sulle caratteristiche e sugli invarianti di deformazione di uno spostamento diretto e inverso. In particolare sono stabilite alcune *formule esplicite* (n. 2) che, per la loro generalità, non sono, a mio avviso, prive di interesse.

Viene altresì presentata (n. 3) una valida alternativa al tensore di deformazione, dando nuova luce alle caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso, nonché ai corrispondenti invarianti. Si tratta di un tensore *simmetrico*, di tipo contravariante, *in relazione quadratica invertibile* col tensore di deformazione, che consente, nella Nota II, di pervenire ad una nuova espressione del lavoro nominale delle forze intime. Questa espressione, *affatto generale*, porta, nel caso di un sistema a trasformazioni reversibili, a legami stress-strain diversi da quelli usuali, nonché ad una definizione di isotropia in un certo senso *duale* di quella di A. Signorini ([9], p. 136).

In particolare si ritrova, per i sistemi isotropi, il noto legame che esprime il tensore *euleriano* degli sforzi come funzione di *secondo grado* del tensore di deformazione dello spostamento inverso ([9] p. 138, nonché [11], 303).

PREMESSE. - Si consideri un generico sistema continuo tridimensionale S, in moto regolare rispetto ad un assegnato riferimento $\mathcal{T} \equiv O\mathbf{c}_1\,\mathbf{c}_2\,\mathbf{c}_3$, indicando con C_* e C due configurazioni, comunque scelte per S, di equazioni parametriche

$$\text{(1)} \qquad OP_* = OP_*(z) \quad , \quad OP = OP(z)$$

rispettivamente, (z^i) $(i = 1, 2, 3)$ essendo arbitrarie coordinate lagrangiane (1).

Convenendo di distinguere grandezze associate a C dalle grandezze analoghe di C_* usando, per le prime, lettere maiuscole e per le seconde lettere minuscole, siano: $\{\boldsymbol{e}_i\}$ la *base* locale in C_* ed $\{\mathbf{E}_i\}$ quella di C:

$$\text{(2)} \qquad \boldsymbol{e}_i \equiv \frac{\partial OP_*}{\partial z^i} \quad , \quad \mathbf{E}_i \equiv \frac{\partial OP}{\partial z^i} \qquad (i = 1, 2, 3);$$

g_{ik} la metrica di C_* e G_{ik} la metrica di C:

$$\text{(3)} \qquad g_{ik} \equiv \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k \quad , \quad G_{ik} \equiv \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_k \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1969.

(1) Può far comodo supporre che le z^i siano coordinate cartesiane per C_*, o anche per C, ma questa scelta sarà qui sempre disponibile.

g^{ik} il reciproco di g_{ik} nella matrice regolare $\|g_{ik}\|$ e G^{ik} il reciproco di G_{ik}:

$$g^{ij} g_{kj} \equiv \delta^i{}_k \quad , \quad G^{ij} G_{kj} \equiv \delta^i{}_k ; \tag{4}$$

$\boldsymbol{e}^i \equiv g^{ik} \boldsymbol{e}_k$ i vettori della *base duale* di $\{\boldsymbol{e}_i\}$ ed $\mathbf{E}^i \equiv G^{ik} \mathbf{E}_k$ gli analoghi per $\{\mathbf{E}_i\}$:

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta^i{}_k \quad , \quad \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{E}_k = \delta^i{}_k ; \tag{4'}$$

ε_{ik} infine il tensore di deformazione relativo allo spostamento $C_* \rightarrow C$:

$$\varepsilon_{ik} \equiv \frac{1}{2} (G_{ik} - g_{ik}) \qquad (i , k = 1 , 2 , 3) . \tag{5}$$

1. Invarianti di deformazione. – Al tensore di deformazione (5) si possono associare due forme miste significative (cfr. [8] p. 86), l'una ottenuta mediante la metrica g_{ik}, l'altra mediante G_{ik} [(2)]:

$$\varepsilon_i^k = g^{kj} \varepsilon_{ij} \quad , \quad \mathcal{E}_i^k = - G^{kj} \varepsilon_{ij} \qquad (i , k = 1 , 2 , 3). \tag{6}$$

In corrispondenza si hanno i due seguenti tipi di *invarianti di deformazione*:

$$\left\{ \begin{aligned} I_1 &\equiv \varepsilon_i^i = g^{ik} \varepsilon_{ik} \\ I_2 &\equiv \sum_1^3{}_i (\varepsilon_i^i \varepsilon_{i+1}^{i+1} - \varepsilon_i^{i+1} \varepsilon_{i+1}^i) = \frac{1}{2} (I_1^2 - \varepsilon_i^k \varepsilon_k^i) \\ I_3 &\equiv \det \| \varepsilon_i^k \| = \frac{1}{g} \det \| \varepsilon_{ik} \| \end{aligned} \right. \tag{7}$$

e

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{I}_1 &\equiv \mathcal{E}_i^i = - G^{ik} \varepsilon_{ik} \\ \bar{I}_2 &\equiv \sum_1^3{}_i (\mathcal{E}_i^i \mathcal{E}_{i+1}^{i+1} - \mathcal{E}_i^{i+1} \mathcal{E}_{i+1}^i) = \frac{1}{2} (\bar{I}_1^2 - \mathcal{E}_i^k \mathcal{E}_k^i) \\ \bar{I}_3 &\equiv \det \| \mathcal{E}_i^k \| = - \frac{1}{G} \det \| \varepsilon_{ik} \| , \end{aligned} \right. \tag{8}$$

essendo g e G i determinanti delle due metriche:

$$g \equiv \det \| g_{ik} \| > 0 \quad , \quad G \equiv \det \| G_{ik} \| > 0 . \tag{9}$$

Naturalmente ogni altro invariante del tensore di deformazione rispetto a g_{ik}, ovvero G_{ik}, è funzione degli I_k, ovvero $\bar{I}_k$ $(k = 1 , 2 , 3)$, come del resto segue dall'identità [(3)]

$$\varepsilon_i^j \varepsilon_j^l \varepsilon_l^k = I_1 \varepsilon_i^j \varepsilon_j^k - I_2 \varepsilon_i^k + I_3 \delta_i^k \qquad (i , k = 1 , 2 , 3), \tag{10}$$

nonché dalla analoga per $\mathcal{E}_i^k$.

Ad esempio per gli invarianti *quadratico* e *cubico* si ha rispettivamente

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{Q} &\equiv \varepsilon_i^j \varepsilon_j^i = I_1^2 - 2 I_2 \quad , \quad \bar{\mathcal{Q}} \equiv \mathcal{E}_i^j \mathcal{E}_j^i = \bar{I}_1^2 - 2 \bar{I}_2 \\ \mathcal{C} &\equiv \varepsilon_i^j \varepsilon_j^l \varepsilon_l^i = I_1^3 - 3 I_1 I_2 + 3 I_3 \quad , \quad \bar{\mathcal{C}} \equiv \mathcal{E}_i^j \mathcal{E}_j^l \mathcal{E}_l^i = \bar{I}_1^3 - 3 \bar{I}_1 \bar{I}_2 + 3 \bar{I}_3 . \end{aligned} \right. \tag{11}$$

(2) Si noti esplicitamente che, scambiando le due metriche g_{ik} e G_{ik}, ciò che in sostanza corrisponde a passare dallo spostamento diretto $C_* \rightarrow C$ allo spostamento inverso, ε_i^k si muta in $\mathcal{E}_i^k$ e viceversa, donde la ragione del segno meno nella $(6)_2$.

(3) Nota come equazione di Hamilton–Cayley (cfr. ad esempio [2] p. 38).

2. FORMULE ESPLICITE. – *I due tensori misti ε_i^k ed $\mathcal{E}_i^k$ sono in corrispondenza biunivoca.* Per riconoscerlo, si cominci con l'osservare che, tenuto conto della definizione (5) e delle relazioni di reciprocità (4), la (6) si scrive

$$(6') \qquad \delta_i^k + 2\,\varepsilon_i^k = \mathrm{G}_{ij}\, g^{jk} \quad , \quad \delta_i^k + 2\,\mathcal{E}_i^k = g_{ij}\, \mathrm{G}^{jk} \qquad (i\,,\,k = 1\,,\,2\,,\,3)\,.$$

D'altra parte i tensori a secondo membro, entrambi regolari: $\det \| \mathrm{G}_{ij}\, g^{jk} \| = \dfrac{\mathrm{G}}{g} > 0$, $\det \| g_{ij}\, \mathrm{G}^{jk} \| = \dfrac{g}{\mathrm{G}} > 0$, sono l'uno l'inverso dell'altro:

$$(\mathrm{G}_{ij}\, g^{jl})\,(g_{lh}\, \mathrm{G}^{hk}) = \mathrm{G}_{ij}\, \delta_h^j\, \mathrm{G}^{hk} = \mathrm{G}_{ij}\, \mathrm{G}^{jk} = \delta_i^k\,.$$

Ne consegue la seguente uguaglianza:

$$(12) \qquad (\delta_i^l + 2\,\varepsilon_i^l)\,(\delta_l^k + 2\,\mathcal{E}_l^k) = \delta_i^k \qquad (i\,,\,k = 1\,,\,2\,,\,3),$$

che già mette in evidenza come i tensori ε_i^k ed $\mathcal{E}_i^k$ siano in sostanza equivalenti.

In ogni caso il legame (12) si può esplicitare. Per questo si esprima la metrica G^{ik} mediante i tensori ε_{ik} e g_{ik}, utilizzando la $(6')_2$, ovvero esplicitamente: $g_{ij}\,\mathrm{G}^{jk} = \delta_i^k - 2\,\mathrm{G}^{jk}\,\varepsilon_{ij}$ nonché, innalzando l'indice i con la metrica g_{ik},

$$(13) \qquad \mathrm{G}^{ik} = g^{ik} - 2\,\mathrm{G}^{jk}\,\varepsilon_j^i\,.$$

Di qui, iterando si ottiene

$$(14) \qquad \mathrm{G}^{ik} = g^{ik} - 2\,\varepsilon^{ik} + 4\,\mathrm{G}^{lk}\,\varepsilon_l^j\,\varepsilon_j^i$$

e ancora $\mathrm{G}^{ik} = g^{ik} - 2\,\varepsilon^{ik} + 4\,\varepsilon^{kj}\,\varepsilon_j^i - 8\,\mathrm{G}^{hk}\,\varepsilon_h^l\,\varepsilon_l^j\,\varepsilon_j^i$ ovvero, avuto riguardo alla (10),

$$\mathrm{G}^{ik} = g^{ik} - 2\,\varepsilon^{ik} + 4\,\varepsilon^{kj}\,\varepsilon_j^i - 8\,\mathrm{G}^{hk}\,(\mathrm{I}_1\,\varepsilon_h^l\,\varepsilon_l^i - \mathrm{I}_2\,\varepsilon_h^i + \mathrm{I}_3\,\delta_h^i)\,.$$

Ne consegue, tenuto conto delle (13) e (14), l'espressione cercata:

$$(15) \qquad \boxed{\mathfrak{D}^2\,\mathrm{G}^{ik} = (1 + 2\,\mathrm{I}_1 + 4\,\mathrm{I}_2)\, g^{ik} - 2\,(1 + 2\,\mathrm{I}_1)\,\varepsilon^{ik} + 4\,\varepsilon^{ij}\,\varepsilon_j^k} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

ove si è posto per brevità, come dalla (6'),

$$(16) \qquad \mathfrak{D}^2 \equiv \frac{\mathrm{G}}{g} = 1 + 2\,\mathrm{I}_1 + 4\,\mathrm{I}_2 + 8\,\mathrm{I}_3 > 0 \quad , \quad \frac{1}{\mathfrak{D}^2} \equiv \frac{g}{\mathrm{G}} = 1 + 2\,\bar{\mathrm{I}}_1 + 4\,\bar{\mathrm{I}}_2 + 8\,\bar{\mathrm{I}}_3 > 0\,.$$

Alla (15) si accompagna, in virtù della $(6')_2$, il seguente *legame quadratico* tra le matrici ε_i^k ed $\mathcal{E}_i^k$:

$$(17) \qquad \boxed{\mathfrak{D}^2\,\mathcal{E}_i^k = -4\,\mathrm{I}_3\,\delta_i^k - (1 + 2\,\mathrm{I}_1)\,\varepsilon_i^k + 2\,\varepsilon_i^j\,\varepsilon_j^k} \qquad (i\,,k = 1\,,\,2\,,\,3),$$

nonché il legame inverso, quale si ottiene scambiando le due metriche g_{ik} e G_{ik}:

$$(17') \qquad \boxed{\frac{1}{\mathfrak{D}^2}\,\varepsilon_i^k = -4\,\bar{\mathrm{I}}_3\,\delta_i^k - (1 + 2\,\bar{\mathrm{I}}_1)\,\mathcal{E}_i^k + 2\,\mathcal{E}_i^j\,\mathcal{E}_j^k} \qquad (i\,,\,k = 1\,,\,2\,,\,3)\,.$$

In parallelo si hanno le seguenti relazioni invertibili tra gli invarianti (7) e (8), come del resto segue direttamente dalla (12):

$$(18)\quad \begin{cases} \bar{\mathrm{I}}_1 = -\dfrac{1}{\mathfrak{D}^2}(\mathrm{I}_1 + 4\,\mathrm{I}_2 + 12\,\mathrm{I}_3)\ , & \bar{\mathrm{I}}_2 = \dfrac{1}{\mathfrak{D}^2}(\mathrm{I}_2 + 6\,\mathrm{I}_3)\ , \quad \bar{\mathrm{I}}_3 = -\dfrac{\mathrm{I}_3}{\mathfrak{D}^2} \\ \mathrm{I}_1 = -\mathfrak{D}^2(\bar{\mathrm{I}}_1 + 4\,\bar{\mathrm{I}}_2 + 12\,\bar{\mathrm{I}}_3)\ , & \mathrm{I}_2 = \mathfrak{D}^2(\bar{\mathrm{I}}_2 + 6\,\bar{\mathrm{I}}_3)\ , \quad \mathrm{I}_3 = -\mathfrak{D}^2\,\bar{\mathrm{I}}_3\,. \end{cases}$$

Osservazione. – Se si assume come metrica di riferimento, quindi *assegnata*, il tensore g_{ik}, *le forme miste* $\varepsilon_i^{\ k}$ ed $\mathcal{E}_i^{\ k}$ *possono* utilmente *sostituire il tensore di deformazione* (5). Nel primo caso, per la metrica di C si utilizzeranno la (15) e la $(6')_1$, ovvero

$$(19)\quad \begin{cases} \mathrm{G}^{ik} = \dfrac{1}{\mathfrak{D}^2}\, g^{ij}\,[(\mathfrak{D}^2 - 8\,\mathrm{I}_3)\,\delta_j^{\ k} - 2\,(1 + 2\,\mathrm{I}_1)\,\varepsilon_j^{\ k} + 4\,\varepsilon_j^{\ l}\,\varepsilon_l^{\ k}] \\ \mathrm{G}_{ik} = g_{kj}\,(\delta_i^{\ j} + 2\,\varepsilon_i^{\ j}) \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3)\,; \end{cases}$$

nel secondo si dovrà intendere, in virtù dei legami equivalenti (17)-(17′) e concordemente alle (6′),

$$(20)\quad \begin{cases} \mathrm{G}^{ik} = g^{ij}\,(\delta_j^{\ k} + 2\,\mathcal{E}_j^{\ k}) \\ \mathrm{G}_{ik} = \mathfrak{D}^2 g_{kj}\left[\left(\dfrac{1}{\mathfrak{D}^2} - 8\,\bar{\mathrm{I}}_3\right)\delta_i^{\ j} - 2\,(1 + 2\,\bar{\mathrm{I}}_1)\,\mathcal{E}_i^{\ j} + 4\,\mathcal{E}_i^{\ l}\,\mathcal{E}_l^{\ j}\right] \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Naturalmente, come il prodotto $g^{ij}\,\varepsilon_j^{\ k} \equiv \varepsilon^{ik}$, anche il tensore analogo $g^{ij}\,\mathcal{E}_j^{\ k}$ deve, subordinatamente alla (17), intendersi *simmetrico*. Le (19) e (20) presuppongono cioè le seguenti limitazioni [4]:

$$(21)\qquad g^{ij}\,\varepsilon_j^{\ k} = g^{kj}\,\varepsilon_j^{\ i} \quad , \quad g^{ij}\,\mathcal{E}_j^{\ k} = g^{kj}\,\mathcal{E}_j^{\ i}\,,$$

concordemente alla circostanza che delle *nove* $\varepsilon_i^{\ k}$, ovvero $\mathcal{E}_i^{\ k}$, *soltanto sei sono indipendenti*.

3. Una alternativa per il tensore di deformazione. – Se le z^i sono coordinate cartesiane ortogonali per $\mathrm{C}_* : g_{ik} = \delta_{ik}$, le condizioni (21) semplicemente si riducono alle uguaglianze $\varepsilon_i^{\ k} = \varepsilon_k^{\ i}$, $\mathcal{E}_i^{\ k} = \mathcal{E}_k^{\ i}\,(i\,,k = 1\,,2\,,3)$. Se, viceversa, si vuol conservare la generalità delle coordinate lagrangiane z^i, conviene pensare, come valida alternativa ad ε_{ik}, non ad $\mathcal{E}_i^{\ k}$ o a $\mathcal{E}^{ik} \equiv \mathrm{G}^{ij}\,\mathcal{E}_j^{\ k}$, bensì al prodotto

$$(22)\qquad \bar{\varepsilon}^{ik} \equiv g^{ij}\,\mathcal{E}_j^{\ k} \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3)\,.$$

Tale tensore è innanzitutto *simmetrico*, subordinatamente alla $(21)_2$, e la sua forma mista, $\bar{\varepsilon}_i^{\ k} \equiv g_{ij}\,\bar{\varepsilon}^{jk}$ coincide col tensore $\mathcal{E}_i^{\ k}$:

$$(23)\qquad \bar{\varepsilon}_i^{\ k} \equiv g_{ij}\,\bar{\varepsilon}^{jk} = \mathcal{E}_i^{\ k}\,.$$

(4) O le equivalenti $\varepsilon_i^{\ j}\,g_{jk} = \varepsilon_k^{\ j}\,g_{ji}$, $\mathcal{E}_i^{\ j}\,g_{jk} = \mathcal{E}_k^{\ j}\,g_{ji}$. Si noti, in ogni caso, che la $(21)_2$ implica a fortiori, come dalla (20), la simmetria dei tensori $\mathrm{G}^{ij}\,\mathcal{E}_j^{\ k} \equiv \mathcal{E}^{ik} = -\mathrm{G}^{ij}\mathrm{G}^{kl}\,\varepsilon_{jl}$ e $\mathrm{G}_{kj}\,\mathcal{E}_i^{\ j} = -\varepsilon_{ik}$ rispettivamente.

Ne consegue che *gli scalari* $\bar{I}_k$ di cui alla (8) *non differiscono dagli invarianti del tensore* (22) *rispetto alla metrica di riferimento* g_{ik}. Al tempo stesso essendo, come dalle (22) e (6),

$$\varepsilon_i^k = -G_{ij}\,\bar{\varepsilon}^{jk}, \tag{24}$$

gli scalari (7) coincidono, a meno del segno, con gli invarianti del tensore $\bar{\varepsilon}^{ik}$ rispetto alla metrica G_{ik}.

Per quanto poi riguarda i tensori ε_{ik} ed $\bar{\varepsilon}^{ik}$, dalle (17)-(17′) seguono direttamente, avuto riguardo alle (22)-(23) e $(6)_1$, i seguenti *legami quadratici, invertibili*:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{D}^2\,\bar{\varepsilon}^{ik} = -4\,I_3\,g^{ik} - (1+2\,I_1)\,\varepsilon^{ik} + 2\,\varepsilon^{ij}\varepsilon_j^k \\ &\frac{1}{\mathfrak{D}^2}\,\varepsilon_{ik} = -4\,\bar{I}_3\,g_{ik} - (1+2\,\bar{I}_1)\,\bar{\varepsilon}_{ik} + 2\,\bar{\varepsilon}_i^{\,j}\,\bar{\varepsilon}_{jk} \end{aligned}\right. \qquad (i\,,k=1\,,2\,,3). \tag{25}$$

Si vede bene di qui non solo che gli invarianti di ε_{ik} ed $\bar{\varepsilon}^{ik}$ (rispetto a g_{ik}) sono in corrispondenza biunivoca, in accordo con la (18), ma che *ogni direzione unita di* ε_{ik} *rispetto a* g_{ik} (direzione principale di deformazione) *è unita anche per* $\bar{\varepsilon}^{ik}$.

In ogni caso, in stretta analogia con le (5) e (15), si ha dalla (20)

$$\boxed{\bar{\varepsilon}^{ik} = \frac{1}{2}\,(G^{ik} - g^{ik})}\,, \tag{26}$$

nonché [cfr. la (23)]

$$\boxed{\frac{1}{\mathfrak{D}^2}\,G_{ik} = (1+2\,\bar{I}_1+4\,\bar{I}_2)\,g_{ik} - 2\,(1+2\,\bar{I}_1)\,\bar{\varepsilon}_{ik} + 4\,\bar{\varepsilon}_i^{\,j}\,\bar{\varepsilon}_{jk}}\,; \tag{27}$$

ciò che esprime la metrica di C mediante g_{ik} e il tensore $\bar{\varepsilon}_{ik} \equiv g_{ij}\,g_{kl}\,\bar{\varepsilon}^{jl}$.

D'altra parte la configurazione attuale C di un sistema continuo è interamente descritta, a meno di uno spostamento rigido d'insieme, dalla sua metrica G_{ik}, ovvero G^{ik} (5). Appare allora evidente che, assegnata la metrica di riferimento g_{ik}, mentre l'ordinario tensore di deformazione ε_{ik} è comodo in una descrizione di C subordinata alle variabili G_{ik}, il tensore $\bar{\varepsilon}^{ik}$ è da preferirsi in una descrizione che faccia capo alla forma contravariante G^{ik}.

Osservazione. – Tutte le grandezze precedentemente considerate, in particolare ε_{ik}, ε_i^k, $\mathcal{E}_i^k$, $\bar{\varepsilon}^{ik}$, *si trasformano con legge tensoriale in un cambiamento di coordinate lagrangiane* $z^i = z^i(z')$. Pertanto esse definiscono altrettanti tensori di C_*, ovvero di C, a seconda che le z^i si interpretino come coordinate locali della prima varietà o della seconda.

In ogni caso non si tratta di tensori indipendenti. Infatti, posto che C_* e C sono entrambe varietà riemanniane, anzi euclidee, l'una di metrica g_{ik},

(5) La rotazione locale è determinata dalla metrica G_{ik}, purché questa sia euclidea: basta risolvere un sistema ai differenziali totali (cfr. [9], p. 74, nonché [3], p. 177 e, in forma intrinseca, [4], p. 634).

l'altra di metrica G_{ik}, è chiaro che le coppie ε_{ik}, $\varepsilon_i^{\ k}$ ed $\bar{\varepsilon}^{ik}$, $\mathcal{E}_i^{\ k}$ rispettivamente, definiscono ciascuna, subordinatamente alle $(6)_1$ e (22), un medesimo tensore di C_*; laddove, come tensori di C, coincidono invece, in conformità delle $(6)_2$ e (24), $-\varepsilon_{ik}$ ed $\mathcal{E}_i^{\ k}$, nonché $-\bar{\varepsilon}^{ik}$ ed $\varepsilon_i^{\ k}$.

D'altra parte sussistono i legami (17)-(17′), sì che in definitiva, tanto in C_*, quanto in C, pensate come varietà metriche, i quattro sistemi doppi ε_{ik}, $\varepsilon_i^{\ k}$, $\mathcal{E}_i^{\ k}$ e $\bar{\varepsilon}^{ik}$ definiscono in sostanza, come è naturale, un unico ente tensoriale.

Si noti altresì esplicitamente che, assumendo come configurazione di riferimento quella attuale C e in questa coordinate cartesiane ortogonali: $G_{ik}=\delta_{ik}$, le quantità $\mathcal{E}_i^{\ k} \equiv -\delta^{kj}\varepsilon_{ij}$ si riducono *alle ordinarie caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso*. Al tempo stesso le $\varepsilon_i^{\ k} \equiv -\delta_{ij}\bar{\varepsilon}^{ik}$ danno, come dalla (12), *il trasformato del tensore di deformazione* ε_{ik} *mediante la rotazione locale* (cfr. [9], p. 60, nonché [5]).

Se invece, come è più spontaneo, si fa riferimento alla configurazione C_*, e si assumono quivi coordinate dello stesso tipo: $g_{ik}=\delta_{ik}$, insieme a $\varepsilon_{ik}=\delta_{kj}\varepsilon_i^{\ j}$, si ha l'eguaglianza $\bar{\varepsilon}^{ik} = \delta^{ij}\mathcal{E}_j^{\ k}$.

Quanto precede vale a mettere in evidenza il significato delle *componenti cartesiane di* $\bar{\varepsilon}^{ik}$ in C e C_* rispettivamente. *Nel primo caso esse danno il trasformato del tensore di deformazione mediante la rotazione locale, nel secondo corrispondono alle caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso.*

Riferimenti bibliografici.

[1] Cattaneo-Gasparini I., *Sopra una proprietà caratteristica dei sistemi isotropi*, « Boll. U.M.I. », s. II, anno V (1943).

[2] Ericksen J. L., *Tensor fields*, « Handbuch der Physik », III/I, Berlin 1960.

[3] Ferrarese G., *Sulla velocità angolare nei moti rigidi e la rotazione locale nelle deformazioni finite*, « Rendic. di Matem. » (1-2), 18 (1959).

[4] Ferrarese G., *Sulla forma intrinseca delle condizioni di congruenza per deformazioni finite*, « Rendic. Acc. Lincei », s. VIII, *36*, 5 (1964).

[5] Galletto D., *Qualche osservazione di cinematica delle deformazioni finite*, « Memorie Acc. Patavina SS.LL.AA. », 78 (1966).

[6] Galletto D., *Sulla condizione di isotropia per i sistemi continui a trasformazioni reversibili*, « Rendic. Semin. Matem. di Padova », 37 (1967).

[7] Manacorda T., *Relazioni fra deformazioni e stato di tensione per un generico solido incomprimibile a trasformazioni reversibili*, « Boll. U.M.I. », s. III, anno XII (1957).

[8] Sedov L. I., *Foundations of the non linear mechanics of continua*, Pergamon Press (1966).

[9] Signorini A., *Trasformazioni termoelastiche finite*, « Memorie Ann. di Matem. », s. IV, 22 (1943).

[10] Signorini A., *Estensione delle formule di Almansi a sistemi elastici anisotropi*, « Rend. Acc. Lincei », s. VIII, 25, 5 (1958).

[11] Truesdell C. e Toupin R., *The classical field theories*, « Handbuch der Physik », III/I, Berlin (1960).