Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Lazar Dragos

# L'écoulement des fluides visqueux et compressibles en présence d'une plaque plane

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **46** (1969), n.1, p. 21–26.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_1_21_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

**Meccanica.** — *L'écoulement des fluides visqueux et compressibles en présence d'une plaque plane.* Nota di LAZAR DRAGOȘ presentata (*) dal Socio B. FINZI.

RIASSUNTO. — Il problema del moto dei fluidi comprimibili in presenza di una lamina e ridotto alla risoluzione di due equazioni integrali (26) e (32').

1. *Introduction. Equations de mouvement.* – On considère un fluide visqueux et compressible, satisfaisant à la loi des gaz parfaits $p_r = \rho_r \mathrm{RT}_r$, en mouvement en présence d'une plaque plane. On admet qu'à l'infini l'écoulement de fluide est uniforme, à vitesse $V_0$ parallèle à la plaque et qu'il a lieu en présence d'un champ de température $T_0$. Le problème qu'on se propose est celui d'étudier l'écoulement perturbé par la présence de la plaque. Dans ce but on choisit le système de référence de telle manière que son origine coincide avec le bord d'attaque de la plaque et que l'axe $Ox$ soit parallèle à la plaque et à la vitesse du fluide à l'infini, l'axe $Oy$ étant perpendiculaire au plan de la plaque. La longueur de la plaque sera notée par L et les vecteurs unité des axes par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Etant donné que les conditions du problème sont les mêmes à chaque instant et dans tout plan parallèle au plan $xOy$, il en résulte que l'écoulement sera permanent et plan.

Pour décrire l'écoulement, nous allons utiliser des variables sans dimensions où L est l'unité pour la longueur, $V_0$ pour la vitesse, $T_0$ pour la température, $\rho_0$ pour la densité et $\rho_0 V_0^2$ pour la pression. La viscosité du fluide $\mu$ est supposée constante. Mettant en évidence la perturbation $(u, v, \rho, p, \mathrm{T})$, on écrit

$$(1) \qquad \vec{V} = (1+u)\vec{i} + v\vec{j} \quad , \quad \bar{\rho} = 1 + \rho \quad , \quad \bar{T} = 1 + T \quad , \quad \bar{p} = RT_0 V_0^{-2} + p$$

où $\bar{\rho}$, $\bar{T}$ et $\bar{p}$ représentent la densité, la température et la pression totales.

Linéarisant les équations de mouvement on obtient:

$$(2) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(3) \qquad \mathrm{P}u + \frac{1}{3}\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \mathrm{P} = \alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(4) \qquad \mathrm{P}v + \frac{1}{3}\alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1968.

L'équation des gaz parfaits s'écrit:

$$\gamma M^2 p = \rho + T \tag{5}$$

et l'équation de l'énergie:

$$QT + (\gamma - 1) M^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad , \quad Q = \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \,. \tag{6}$$

Nous avons noté:

$$\alpha = \frac{1}{Re} = \frac{\mu}{\rho_0 L V_0} \quad , \quad \beta = \frac{1}{Re\, Pr} = \frac{\varkappa}{c_p \rho_0 L V_0} \,, \tag{7}$$

$$M^2 = \frac{V_0^2}{\gamma R T_0} \quad , \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \,.$$

R$e$ étant le nombre de Reynolds, P$r$ le nombre de Prandtl, M le nombre de Mach dans l'écoulement de base, $\gamma$ le rapport des chaleurs spécifiques et $\varkappa$ le coefficient de conductivité thermique supposé également constant.

Aux équations (2)–(6) il faut ajouter encore la condition:

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} (u , v , \rho , p , T) = 0. \tag{8}$$

Eliminant T de (4) et (5) on obtient:

$$M^2 S p - Q\rho = 0 \quad , \quad S = \gamma\beta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \tag{9}$$

et $p$ de (3) et (4) on tire:

$$P \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \,. \tag{10}$$

De (2), (3) et (9) on déduit:

$$Q \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + M^2 PSu + \frac{1}{3} \alpha M^2 S \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \,. \tag{11}$$

De (10) et (11) on déduit que $u$ et $v$ satisfont à l'équation:

$$L \left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

$$L \left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y}\right) = PQ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + M^2 PS \frac{\partial}{\partial x} \left\{P + \frac{1}{3} \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right\} \cdot$$

2. *Représentation de la solution générale*. – On cherche la solution sous la forme: $\exp(-i\lambda x + sy)$. L'équation (12) fournit la suivante équation algébrique pour $s$:

$$L(-i\lambda , s) = \{\alpha (s^2 - \lambda^2) + i\lambda\} \{a (s^2 - \lambda^2)^2 + b (s^2 - \lambda^2) + c\} = 0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} a &= \beta - \frac{4}{3} \alpha\beta\gamma M^2 i\lambda = a_1 + i\lambda a_2 = \beta a' \\ b &= \left(\beta\gamma + \frac{4}{3} \alpha\right) M^2 \lambda^2 + i\lambda = b_1 + i\lambda , \qquad c = M^2 i\lambda^3 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\delta(\lambda) = b^2 - 4\, ac = M^4 (3\, \beta\gamma - 4\, \alpha)^2 \lambda^4 + 6\, M^2 (3\, \beta\gamma + 4\, \alpha - 6\, \beta)\, i\lambda^3 - 9\, \lambda^2 .$$

On en déduit que les racines de l'équation (13) sont distinctes et que leur partie réelle est différente de zéro. Si ces racines étaient imaginaires ($s = ir$, $r$ réelle) il en résulterait:

$$\alpha (r^2 + \lambda^2) = i\lambda$$

$$a_1 (r^2 + \lambda^2) - b_1 = 0 \quad , \quad a_2 (r^2 + \lambda^2)^2 - (r^2 + \lambda^2) + \lambda^2 M^2 = 0$$

les deux dernières équations devant être satisfaites simultanément. Ces conditions ne peuvent pas être réalisées pour $\lambda$ réel.

Nous notons:

$$s_1 = -\sqrt{\lambda^2 - \frac{i\lambda}{\alpha}} \quad , \quad s_2 = -\sqrt{\lambda^2 - \frac{b - \sqrt{\delta}}{2a}} \quad , \quad s_3 = -\sqrt{\lambda^2 - \frac{b + \sqrt{\delta}}{2a}} \tag{15}$$

avec détermination arithmétique du radical.

Compte-tenu de (8) on tire:

$$\begin{aligned} u_{\pm}(x, y) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1,2,3} s_j A_j^{\pm}(\lambda)\, e^{-i\lambda x \pm s_j y}\, d\lambda \\ v_{\pm}(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j} i\lambda B_j^{\pm}(\lambda)\, e^{-i\lambda x \pm s_j y}\, d\lambda. \end{aligned} \tag{16}$$

De (3) on détermine $p$. De (4) on tire:

$$\lambda^2 P_j B_j^{\pm} = s_j^2 P_j A_j^{\pm} \quad , \quad P_j = \alpha (s_j^2 - \lambda^2) + i\lambda \quad , \quad (P_1 = 0)$$

de sorte que nous avons:

$$\lambda^2 B_k^{\pm} = s_k^2 A_k^{\pm}, \qquad k = 2, 3. \tag{17}$$

Ensuite on détermine $\rho$ de (2) et T de (5). La vérification de l'équation (6) entraine la relation:

$$A_1^{\pm} = B_1^{\pm} \tag{18}$$

le cas $\alpha = \beta$, $\gamma = 1$ étant exclu. Les relations obtenues de (6) pour $k = 2, 3$ sont identiquement vérifiées en vertu des résultats (17) et (13).

En conclusion:

$$\begin{aligned} p_{\pm}(x, y) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k} s_k p_k^* A_k^{\pm}\, e^{-i\lambda x \pm s_k y}\, d\lambda \\ \rho_{\pm}(x, y) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k} s_k \rho_k^* A_k^{\pm}\, e^{-i\lambda x \pm s_k y}\, d\lambda \\ T_{\pm}(x, y) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k} s_k T_k^* A_k^{\pm}\, e^{-i\lambda x \pm s_k y}\, d\lambda \end{aligned} \tag{19}$$

$$(19') \qquad -i\lambda p_k^* = \frac{4}{3}\,\alpha\,(s_k^2 - \lambda^2) + i\lambda \quad , \quad \rho_k^* = \frac{s_k^2}{\lambda^2} - 1$$

$$T_k^* = \left(1 - \frac{s_k^2}{\lambda^2}\right) a' - \gamma M^2 .$$

Les inconnues du problème, $A_j^{\pm}$, $j = 1 , 2 , 3$ se déterminent des conditions aux limites.

3. *Conditions aux limites.* – La condition d'adhérence nous fournit:

$$(20) \qquad u_+(x , 0) = -1 \quad , \quad x \in [0 , 1]$$

$$(21) \qquad u_+(x , 0) - u_-(x , 0) = 0 , \quad \forall x$$

$$(22) \qquad v_+(x , 0) = 0 \quad , \quad x \in [0 , 1]$$

$$(23) \qquad v_+(x , 0) - v_-(x , 0) = 0 , \quad \forall x .$$

On peut encore écrire deux autres conditions, imposées par l'état de température de la plaque. Ainsi, si la plaque est un conducteur thermique parfait, nous avons:

$$(24) \qquad 1 + T_+(x , 0) = \Theta(x) \quad , \quad x \in [0 , 1]$$

$$(25) \qquad T_+(x , 0) - T_-(x , 0) = 0 , \quad \forall x .$$

$\Theta(x)$ étant la température extérieure de la plaque (en variables sans dimensions). Si la plaque est isolatrice, alors le flux de chaleur à travers celle-ci sera nul, de sorte que:

$$\left.\frac{\partial T_+}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 , \qquad x \in [0 , 1]$$

$$\left.\frac{\partial T_+}{\partial y}\right|_0 - \left.\frac{\partial T_-}{\partial y}\right|_0 = 0 , \qquad \forall x .$$

Nous allons considérer le cas de la plaque à conductivité parfaite.

Utilisant la solution générale, les conditions (20)–(25) nous fournissent:

$$(20') \qquad s_1 A_1^+ + s_2 A_2^+ + s_3 A_3^+ = F$$

$$(26) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda = -1 , \qquad x \in [0 , 1]$$

$$(21') \qquad s_1 (A_1^+ + A_1^-) + s_2 (A_2^+ + A_2^-) + s_3 (A_3^+ + A_3^-) = 0$$

$$(22') \qquad \lambda^2 A_1^+ + s_2^2 A_2^+ + s_3^2 A_3^+ = G$$

$$(27) \qquad \int_{-\infty}^{+8} i\lambda\, G(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda = 0 , \qquad x \in [01] ,$$

$$(23') \qquad \lambda^2 (A_1^+ - A_1^-) + s_2^2 (A_2^+ - A_2^-) + s_3^2 (A_3^+ - A_3^-) = 0$$

$$(28) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda = -1 + \Theta(x), \qquad x \in [0, 1]$$

$$(24') \qquad s_2 T_2^* A_2^+ + s_3 T_3^* A_3^+ = H(\lambda)$$

$$(25') \qquad s_2 T_2^* (A_2^+ + A_2^-) + s_3 T_3^* (A_3^+ + A_3^-) = 0.$$

De (20′), (22′) et (24′) on tire:

$$(29) \qquad A_j^+ = \alpha_j F + \beta_j G + \gamma_j H$$

avec les notations:

$$(29') \qquad \begin{aligned} &\delta^* \alpha_1 = s_2 s_3 (s_2 T_3^* - s_3 T_2^*) \quad , \quad \delta^* \beta_1 = s_2 s_3 (T_2^* - T_3^*) \\ &\delta^* \gamma_1 = s_2 s_3 (s_3 - s_2) \quad , \quad \delta^* = s_1 s_2 s_3 (s_2 T_3^* - s_3 T_2^*) - \lambda^2 s_2 s_3 (T_3^* - T_2^*) \\ &\delta^* \alpha_2 = -\lambda^2 s_3 T_3^* \quad , \quad \delta^* \beta_2 = s_1 s_3 T_3^* \quad , \quad \delta^* \gamma_2 = -s_3 (s_1 s_3 - \lambda^2) \\ &\delta^* \alpha_3 = \lambda^2 s_2 T_2^* \quad , \quad \delta^* \beta_3 = -s_1 s_2 T_2^* \quad , \quad \delta^* \gamma_3 = s_2 (s_1 s_2 - \lambda^2). \end{aligned}$$

Les équations (21′) (23′) et (25′) s'écrivent:

$$(21'') \qquad s_1 A_1^- + s_2 A_2^- + s_3 A_3^- = -F$$

$$(23'') \qquad \lambda^2 A_1^- + s_2^2 A_2^- + s_3^2 A_3^- = G$$

$$(25'') \qquad s_2 T_2^* A_2^- + s_3 T_3^* A_3^- = -H.$$

La solution du dernier système s'obtient de (29) en substituant $-F$ à $F$ et $-H$ à $H$. Nous avons:

$$(30) \qquad A_j^- = -\alpha_j F + \beta_j G - \gamma_j H.$$

En conclusion, les inconnues du problème, $A_j$, s'expriment à l'aide des fonctions $F$, $G$, $H$, solutions des équations intégrales (26), (27) et (28). On observe cependant que ces équations intégrales ne déterminent pas de façon unique les fonctions F, G et H. Pour assurer l'unicité de la solution il faut écrire des conditions supplémentaires à l'extérieur de la plaque. Telles conditions s'obtiennent de la continuité de la pression, du tourbillon et du flux de chaleur. Nous imposons donc:

$$(31) \qquad [p]_0 = p_+(x, 0) - p_-(x, 0) = 0, \qquad x \in C[0, 1]$$

$$(32) \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_0 = \left.\frac{\partial u_+}{\partial y}\right|_{y=0} - \left.\frac{\partial u_-}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad x \in C[0, 1]$$

$$(33) \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_0 = \left.\frac{\partial T_+}{\partial y}\right|_{y=0} - \left.\frac{\partial T_-}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad x \in C[0, 1].$$

Utilisant la solution générale, on obtient:

$$[p]_0 = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} G^* \, G e^{-i\lambda x} \, d\lambda \tag{34}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_0 = -\frac{2}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda \, (\alpha_1 F + \gamma_1 H) \, e^{-i\lambda x} \, d\lambda \tag{35}$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_0 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} H^* \, H e^{-i\lambda x} \, d\lambda \tag{36}$$

$$\delta^* G^* = s_1 \, s_2 \, s_3 \, (T_2^* \, p_3^* - T_3^* \, p_2^*)$$

$$\lambda^2 \, \delta^* H^* = a' \, s_2 \, s_3 \, (s_2 - s_3) \, \{ s_1 \, s_2 \, s_3 \, (s_2 + s_3) -$$

$$- \lambda^2 \, (s_2^2 + s_2 \, s_3 + s_3^2) + \lambda^4 \, (1 - \gamma M^2/a') \} .$$

Les conditions (31)–(33) nous conduisent aux équations suivantes:

$$(31'), (33') \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} G^* \, G e^{-i\lambda x} \, d\lambda = 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H^* \, H e^{-i\lambda x} \, d\lambda = 0 , \qquad x \in C \, [1 \, , 0]$$

$$(32') \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\alpha_1 \, F e^{-i\lambda x} \, d\lambda = - \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\gamma_1 \, H e^{-i\lambda x} \, d\lambda , \qquad x \in C \, [0 \, , 1].$$

Les résultats (34)–(36) sont utiles pour le calcul de l'action hydrodynamique sur la plaque et pour le calcul du flux de chaleur. Le problème aux limites se réduit, en essence, à la résolution des équations intégrales (26) et (32′) où H est connue de la résolution d'un problème de même type. Dans le cas de la plaque demi–infinie, les équations intégrales se résolvent explicitement à l'aide de la méthode Wiener–Hopf.