Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Lazar Dragos

L'écoulement des fluides conducteurs, visqueux et compressibles, en présence d'une plaque plane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.6, p. 507–514.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_6_507_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Meccanica. — *L'écoulement des fluides conducteurs, visqueux et compressibles, en présence d'une plaque plane.* Nota di LAZAR DRAGOS, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

RIASSUNTO. — Il moto uniforme in presenza di un campo magnetico omogeneo ed allineato è perturbato dalla presenza di una lamina senza incidenza. Le equazioni del moto perturbato e linearizzato sono integrate col metodo delle onde piane. Le condizioni al contorno si riducono ad un sistema di equazioni integrali.

1. *Introduction.* – L'étude de l'écoulement des fluides visqueux et conducteurs, en présence d'une plaque plane sans incidence, a été abordée par Greenspan et Carrier [1]. Une solution plus générale, valable aussi pour la plaque à incidence, est donnée dans [2] et dans [3] pour le cas d'un arc quelconque. Dans tous les travaux se référant à ce problème, on considère le fluide incompressible.

Dans cette note nous nous proposons d'étudier l'écoulement du fluide compressible, en présence d'une plaque plane. Nous admettons que le fluide satisfait à la loi des gaz parfaits et que la plaque est sans incidence. Nous supposons donc qu'à l'infini, la vitesse et l'induction magnétique sont parallèles à la plaque.

2. *Equations de mouvement.* – On utilise des variables sans dimensions, où V_0 la vitesse du fluide dans l'écoulement non perturbé, B_0 l'induction magnétique, ρ_0 la densité et T_0 la température (les valeurs de l'écoulement non perturbé) sont considérées comme unités pour les grandeurs correspondantes. La longueur L de la plaque est considérée comme unité de longueur. Le système de référence est choisi tel que son origine coincide avec le bord d'attaque de la plaque, l'axe Ox ait la direction de la plaque (la même que la direction de la vitesse et de l'induction à l'infini) et l'axe Oy soit perpendiculaire au plan de la plaque (donc dans le plan de l'écoulement du fluide).

C'est évident que l'écoulement sera permanent et plan.

Négligeant les puissances d'ordre supérieur des perturbations, les équations de mouvement s'écrivent:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$P_1 v_x - \frac{\varepsilon_1}{3} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1968.

$$P_1 v_y - \frac{\varepsilon_1}{3}\frac{\partial^2 \rho}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} - S\left(\frac{\partial b_x}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial x}\right) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

$$v_y - \varepsilon_2 \frac{\partial b_x}{\partial y} + \left(\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x} - 1\right) b_y = 0\,, \tag{5}$$

la dernière équation provenant de la loi d'Ohm, où l'on a négligé l'effet Hall.

Dans l'équation de l'énergie les effets dissipatifs, électromagnétiques et les effets de la viscosité sont petits, de l'ordre deux relativement aux perturbations, de sorte que nous en allons faire abstraction. L'équation de l'énergie devient:

$$P_3 T + (\gamma - 1) M^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

et les équations des gaz parfaits:

$$\gamma M^2 p = \rho + T\,. \tag{7}$$

C'est préférable que l'équation (6) soit remplacée par:

$$P_3 \rho - M^2 P_4 p = 0 \tag{6'}$$

résultée de (6) et (7).

Nous utilisons les rotations suivantes:

$$P_k = \varepsilon_k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad k = 1\,, 2\,, 3\,, 4 \tag{8}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Re} = \frac{\tilde{\mu}}{\rho_0 L V_0}\,, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Rm} = \frac{1}{\sigma\mu L V_0}\,, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{Re \cdot Pr} = \frac{\varkappa}{c_p \rho_0 L V_0}$$

$$S = \frac{B_0^2}{\mu\rho_0 V_0^2} = \frac{V_A^2}{V_0^2}\,, \quad M^2 = \frac{V_0^2}{\gamma R T_0} = \frac{V_0^2}{a_0^2}\,, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}\,, \quad \varepsilon_4 = \gamma\varepsilon_3$$

V_A étant la vitesse d'Alfvén et a_0 la vitesse du son dans l'écoulement non perturbé.

Pour les perturbations nous avons la condition suivante:

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} (v_x\,, v_y\,, b_x\,, b_y\,, \rho\,, p\,, T) = 0\,. \tag{9}$$

3. *L'équation caractéristique*. – Utilisant la méthode de [4] on déduit, écrivant la matrice associée au système (1)–(5), (6'), que pour obtenir l'équation satisfaite par la grandeur v_x il faut déterminer les polynômes U_i, solutions

du système:

$$
\begin{aligned}
&YU_1 + P_1^* U_3 + U_5 = 0 \\
&- SYU_3 + XU_4 - \varepsilon_2 YU_5 = 0 \\
(10) \qquad &SXU_3 + YU_4 + (\varepsilon_2 X - 1) U_5 = 0 \\
&XU_1 - \frac{1}{3} \varepsilon_1 X^2 U_2 - \frac{1}{3} \varepsilon_1 XYU_3 + P_3^* U_6 = 0 \\
&XU_2 + YU_3 + M^2 P_4^* U_6 = 0 \quad , \quad P_k^* = \varepsilon_k (X^2 + Y^2) - X .
\end{aligned}
$$

De la deuxième et troisième équations on élimine U_4 et l'on obtient: $U_3 = P_2^*$, $U_5 = - S (X^2 + Y^2)$.

La première équation nous fournit:

$$YU_1 = - P_1^* P_2^* + S (X^2 + Y^2) .$$

Des deux dernières équations (10) on élimine U_6 et l'on obtient:

$$XY \left(P_3^* + \frac{1}{3} \varepsilon_1 XM^2 P_4^*\right) U_2 =$$

$$= - Y^2 P_2^* \left(P_3^* + \frac{1}{3} \varepsilon_1 XM^2 P_4^*\right) - M^2 P_4^* X \{P_1^* P_2^* - S (X^2 + Y^2)\} .$$

L'équation satisfaite par v_x est représentée par le polynôme: $XU_1 + P_1^* U_2$. On obtient

$$\text{(11)} \qquad L\left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y}\right) v_x = 0$$

$$\text{(11')} \qquad L (X , Y) = (X^2 + Y^2) (P_1^* P_2^* - SX^2) P_3^* +$$

$$+ M^2 X P_4^* \left\{ \frac{1}{3} \varepsilon_1 (X^2 + Y^2) (P_1^* P_2^* - SX^2) + P_1^* [P_1^* P_2^* - S (X^2 + Y^2)] \right\} .$$

Pour $M = 0$, de (11) on obtient l'équation valable pour le fluide incompressible. On observe que:

$$P_1^* P_2^* - SX^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (X^2 + Y^2 - 2 \varkappa_- X) (X^2 + Y^2 - 2 \varkappa_+ X)$$

$$4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varkappa_\pm = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pm \sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (S - 1)} .$$

Evidemment, si $S > 1$, résulte $\varkappa_- < 0$, $\varkappa_+ > 0$ et si $S < 1$ résulte $\varkappa_- > 0$ et $\varkappa_+ > 0$. Par conséquent, pour le fluide incompressible l'opérateur L se décompose en un produit de trois opérateurs d'ordre II. C'est sur cette observation qu'est basée la solution de [2].

Dans le cas du fluide parfaitement conducteur $P_2^* = - X$.

On vérifie de façon analogue que b_x aussi (tout comme v_y, b_y, ρ, p, T) satisfait à la même équation (11).

4. *Représentation de la solution.* – Pour l'équation (11) on cherche des solutions de la forme exp $(-i\lambda x + sy)$. On obtient l'équation (de dispersion) suivante:

$$\text{(12)}\qquad \mathrm{L}(-i\lambda\,,s) = a\,(s^2-\lambda^2)^4 - i\lambda b\,(s^2-\lambda^2)^3 - \lambda^2\,c\,(s^2-\lambda^2)^2 - i\lambda^3\,d\,(s^2-\lambda^2) + 3\,\mathrm{M}^2\,i\lambda^5 = 0$$

où:

$$\text{(12')}\qquad \begin{aligned} a &= -3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 + 4\,\mathrm{M}^2\,\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4\,i\lambda = a_1 + a_2\,i\lambda \\ b &= 3\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\varepsilon_3 + 3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + 3\,\mathrm{M}^2\,\mathrm{S}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4 - \\ &\quad - \mathrm{M}^2\,\varepsilon_1\,(7\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4 + 4\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4 + 4\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2)\,i\lambda = b_1 + b_2\,i\lambda \\ c &= 3\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + 3\,\varepsilon_3\,(\mathrm{S}-1) - 3\,\mathrm{M}^2\,\mathrm{S}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_4) + \\ &\quad + \mathrm{M}^2\,(7\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + 7\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4 - \varepsilon_1\,\varepsilon_4\,\mathrm{S} + 3\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4 + 4\,\varepsilon_1^2)\,i\lambda = c_1 + c_2\,i\lambda \\ d &= 3\,(\mathrm{S}-1) - 3\,\mathrm{M}^2\,\mathrm{S} + \mathrm{M}^2\,(7\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\,\mathrm{S} + 3\,\varepsilon_2 + 3\,\varepsilon_4)\,i\lambda = d_1 + d_2\,i\lambda\,. \end{aligned}$$

L'équation (12) relative à l'inconnue $(s^2-\lambda^2)$ a, en général, quatre racines distinctes complexes r_k $(k = 1\,,2\,,3\,,4)$. L'on note:

$$\text{(13)}\qquad s_k = -\sqrt{\lambda^2 + r_k}\,, \qquad k = 1\,,2\,,3\,,4\,.$$

En général s_k a des parties réelles différentes de zéro. En cas contraire $s^2+\lambda^2$ serait une racine commune aux équations:

$$a_1\,(s^2+\lambda^2)^3 - \lambda^2\,b_2\,(s^2+\lambda^2)^2 - \lambda^2\,c_1\,(s^2+\lambda^2) - \lambda^4\,d_2 = 0$$
$$a_2\,(s^2+\lambda^2)^4 + b_1\,(s^2+\lambda^2)^3 - \lambda^2 c_2\,(s^2+\lambda^2)^2 + \lambda^2 d_1\,(s^2+\lambda^2) + 3\,\mathrm{M}^2\,\lambda^4 = 0\,.$$

Développant le déterminant de Sylvester associé à ces équations, on obtient

$$\mathrm{D}(\lambda) = \lambda^{10}\,\mathrm{D}_{10} + \lambda^{12}\,\mathrm{D}_{12} + \cdots$$
$$\mathrm{D}_{10} = a_1\,(d_1\,d_2 - 3\,\mathrm{M}^2\,c_1)\,(a_1^2\,d_1^2 + a_1\,b_1\,c_1\,d_1 + b_1^2\,c_1^2)\,.$$

C'est évident que $\mathrm{D}(\lambda)$ ne peut pas être identiquement nul.

Compte-tenu de (9) on déduit la solution suivante:

$$\text{(14)}\qquad \begin{aligned} v_x^{\pm}(x\,,y) &= \pm\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k s_k\,\mathrm{A}_k^{\pm}(\lambda)\,e^{-i\lambda x \pm s_k y}\,\mathrm{d}\lambda \\ b_x^{\pm}(x\,,y) &= \pm\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k s_k\,\mathrm{B}_k^{\pm}(\lambda)\,e^{-i\lambda x \pm s_k y}\,\mathrm{d}\lambda \\ b_y^{\pm}(x\,,y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k i\lambda\,\mathrm{B}_k^{\pm}\,e^{-i\lambda x \pm s_k y}\,\mathrm{d}\lambda \\ v_y^{\pm}(x\,,y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k \mathrm{P}_{2k}\,\mathrm{B}_k^{\pm}\,e^{-i\lambda x \pm s_k y}\,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

b_y étant obtenue de (4) et v_y de (5). Le signe supérieur indique la solution valable dans le demi–plan supérieur ($y > 0$) et le signe inférieur la solution valable dans le demi–plan inférieur ($y < 0$).

De (1) on détermine ρ et de (2) p. La vérification de l'équation (3) (1) implique:

$$A_k^{\pm} = i\lambda\omega_k B_k^{\pm}, \qquad k = 1, 2, 3, 4 \tag{15}$$

avec les notations:

$$\begin{aligned} s_k^2 P_{1k}\omega_k &= -P_{1k}P_{2k} + S(s_k^2 - \lambda^2) \\ P_{jk} &= \varepsilon_j (s_k^2 - \lambda^2) + i\lambda, \qquad j, k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{15'}$$

Finalement nous avons:

$$\begin{aligned} \rho^{\pm}(x, y) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k s_k Q_k B_k^{\pm} e^{-i\lambda x \pm s_k y} d\lambda \\ p^{\pm}(x, y) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k s_k \mathcal{P}_k B_k^{\pm} e^{-i\lambda x \pm s_k y} d\lambda \\ T^{\pm}(x, y) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k s_k \mathfrak{I}_k B_k^{\pm} e^{-i\lambda x \pm s_k y} d\lambda \end{aligned} \tag{16}$$

où

$$\begin{aligned} i\lambda s_k^2 P_{1k} Q_k &= (s_k^2 - \lambda^2)(P_{1k}P_{2k} + S\lambda^2) \\ i\lambda s_k^2 M^2 P_{1k} P_{4k} \mathcal{P}_k &= P_{3k}(s_k^2 - \lambda^2)(P_{1k}P_{2k} + S\lambda^2) \\ s_k^2 P_{1k} P_{4k} \mathfrak{I}_k &= (\gamma - 1)(s_k^2 - \lambda^2)(P_{1k}P_{2k} + S\lambda^2) \end{aligned} \tag{16'}$$

En déduisant l'expression de $\mathcal{P}_k$ nous avons tenu compte de (12).

Les fonctions $B_k^{\pm}$ se déterminent des conditions aux limites.

(1) Pour obtenir ce résultat on tient compte que la relation:

$$a_1 e^{s_1 y} + a_2 e^{s_2 y} + a_3 e^{s_3 y} + a_4 e^{s_4 y} \equiv 0$$

pour tout y, implique, dans l'hypothèse que a_k sont indépendantes de y et s_k distinctes, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. En effet, nous avons:

$$a_1 + a_2 e^{(s_2 - s_1) y} + a_3 e^{(s_3 - s_1) y} + a_4 e^{(s_4 - s_1) y} \equiv 0 \tag{*}$$

et en dérivant par rapport à y:

$$(s_2 - s_1) a_2 + (s_3 - s_1) a_3 e^{(s_3 - s_2) y} + (s_4 - s_1) a_4 e^{(s_4 - s_2) y} \equiv 0.$$

Dérivant encore une fois par rapport à y, on obtient:

$$(s_3 - s_2)(s_3 - s_1) a_3 + (s_4 - s_2)(s_4 - s_1) a_4 e^{(s_4 - s_3) y} \equiv 0$$

relation qui implique $a_3 = a_4 = 0$. De (*) résulte $a_1 = a_2 = 0$.

5. *Conditions aux limites.* – La condition d'adhérence du fluide à la plaque nous fournit:

$$1 + v_x^+(x, 0) = 0 \quad , \qquad x \in [0, 1] \tag{17}$$

$$v_x^+(x, 0) - v_x^-(x, 0) = 0 , \qquad \forall x \tag{18}$$

$$v_y^+(x, 0) = 0 \quad , \qquad x \in [0, 1] \tag{19}$$

$$v_y^+(x, 0) - v_y^-(x, 0) = 0 , \qquad \forall x \tag{20}$$

et la condition de continuité de la composante tangentielle et normale de l'induction:

$$b_x^+(x, 0) - b_x^-(x, 0) = 0 , \qquad \forall x \tag{21}$$

$$b_y^+(x, 0) - b_y^-(x, 0) = 0 , \qquad \forall x . \tag{22}$$

D'autres conditions s'obtiennent en fonction de l'état et des propriétés thermiques de la plaque. Ainsi, par exemple, si la plaque est un conducteur thermique parfait, nous avons:

$$1 + T^+(x, 0) = \Theta(x) \quad , \qquad x \in [0, 1] \tag{23}$$

$$T^+(x, 0) - T^-(x, 0) = 0 , \qquad \forall x \tag{24}$$

$\Theta(x)$ étant la température sans dimensions de la plaque, fournie de l'extérieur.

Utilisant la solution générale on obtient:

$$\Sigma s_k \omega_k B_k^+ = F_1 \tag{17'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda F_1(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = -1 , \qquad x \in [0, 1] \tag{25}$$

$$\Sigma s_k \omega_k (B_k^+ + B_k^-) = 0 \tag{18'}$$

$$\Sigma P_{2k} B_k^+ = F_2 \tag{19'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = 0 , \qquad x \in [0, 1] \tag{26}$$

$$\Sigma P_{2k} (B_k^+ - B_k^-) = 0 \tag{20'}$$

$$\Sigma s_k (B_k^+ + B_k^-) = 0 \tag{21'}$$

$$\Sigma (B_k^+ - B_k^-) = 0 \tag{22'}$$

$$\Sigma s_k \vartheta_k B_k^+ = F_3 \tag{23'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_3(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = -1 + \Theta(x) , \qquad x \in [0, 1] \tag{27}$$

$$\Sigma s_k \vartheta_k (B_k^+ + B_k^-) = 0 . \tag{24'}$$

Nous notons:

$$\delta = \begin{vmatrix} s_1\,\omega_1 & s_2\,\omega_2 & s_3\,\omega_3 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ s_1\,\mathfrak{I}_1 & s_2\,\mathfrak{I}_2 & s_3\,\mathfrak{I}_3 \end{vmatrix}$$

et par Δ_{ij} le complément algébrique normé (divisé par δ) de l'élément δ_{ij}, ligne i, colonne j. Nous notons aussi par Δ_j le déterminant normé obtenu de δ en substituant à la colonne j la colonne formée avec les éléments $(s_4\,\omega_4\,,\,P_{24}\,,\,s_4\,\mathfrak{I}_4)$.

Utilisant la règle de Cramer, de (17′), (19′) et (23′) on obtient:

$$B_j^+ = \sum_{i=1,2,3} \Delta_{ij}\,F_i - \Delta_j\,B_4^+\,, \qquad j = 1\,,2\,,3\,. \tag{28}$$

Compte-tenu de (17′), (19′) et (23′) les relations (18′), (20′) et (24′) deviennent:

$$\Sigma\, s_k\,\omega_k\,B_k^- = -F_1 \tag{18''}$$

$$\Sigma\, P_{2k}\,B_k^- = F_2 \tag{20''}$$

$$\Sigma\, s_k\,\mathfrak{I}_k\,B_k^- = -F_3\,. \tag{24''}$$

La solution du système (18″), (20″), (24″) s'obtient de (28) en substituant $-F_1$ à F_1 et $-F_3$ à F_3. Nous avons donc:

$$B_j^- = -\Delta_{1j}\,F_1 + \Delta_{2j}\,F_2 - \Delta_{3j}\,F_3 - \Delta_j\,B_4^-\,, \qquad s = 1\,,2\,,3\,. \tag{29}$$

De (28) et (29) on tire $B_j^+ + B_j^-$ et $B_j^+ - B_j^-$ et ensuite de (21′) et (22′):

$$B_4^+ + B_4^- = \frac{2\,F_2\,\Sigma\,s_j\,\Delta_{2j}}{\Sigma\,s_j\,\Delta_j - s_4}\quad,\qquad B_4^+ - B_4^- = \frac{2\,F_1\,\Sigma\Delta_{1j} + 2\,F_3\,\Sigma\Delta_{3j}}{\Sigma\,\Delta_j - 1}\,. \tag{30}$$

Les formules (28), (29) et (30) déterminent les inconnues $B_k^\pm$ à l'aide de $F_1\,,F_2\,,F_3$, solutions des équations intégrales (25), (26) et (27).

Utilisant la solution générale et les résultats obtenus, on tire:

$$p^+(x\,,0) - p^-(x\,,0) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} F_2^*\,F_2\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda \tag{31}$$

$$F_2^* = \frac{(\Sigma\,s_j\,\mathfrak{I}_j\,\Delta_{2j})\,(\Sigma\,s_j\,\Delta_j - s_4) - (\Sigma\,s_j\,\Delta_{2j})\,(\Sigma\,s_j\,\mathfrak{I}_j\,\Delta_j - s_4\,\mathfrak{I}_4)}{\Sigma\,s_j\,\Delta_j - s_4}$$

$$\left.\frac{\partial v_x^+}{\partial y}\right|_{y=0} - \left.\frac{\partial v_x^-}{\partial y}\right|_{y=0} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\,(F_1^*\,F_1 + F_3^*\,F_3)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda \tag{32}$$

$$F_l^* = \Sigma\,s_j^2\,\omega_j\,\Delta_{lj} - (\Sigma\,s_j^2\,\omega_j\,\Delta_j - s_4^2\,\omega_4)\,\frac{\Sigma\Delta_{lj}}{\Sigma\Delta_j - 1}$$

$$\left.\frac{\partial T^+}{\partial y}\right|_{y=0} - \left.\frac{\partial T^-}{\partial y}\right|_{y=0} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} (F_1^{**}\,F_1 + F_3^{**}\,F_3)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda \tag{33}$$

$$F_l^{**} = \Sigma\,s_j^2\,\mathfrak{I}_j\,\Delta_{lj} - (\Sigma\,s_j^2\,\mathfrak{I}_j\,\Delta_j - s_4^2\,\mathfrak{I}_4)\,\frac{\Sigma\,\Delta_{lj}}{\Sigma\,\Delta_j - 1} \qquad l = 1\,,3\,.$$

Ces formules sont utiles pour le calcul de l'action hydrodynamique sur la plaque. Les équations intégrales (25), (26) et (27) ne déterminent pas de façon unique les fonctions F_1, F_2, F_3. Des conditions supplémentaires sont nécessaires à l'extérieur de la plaque. Ces conditions s'obtiennent si l'on impose la continuité de la pression, du tourbillon et du flux de chaleur.

En conclusion, nous avons:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_2^* F_2 e^{-i\lambda x} d\lambda = 0 , \qquad x \in C [0 , 1] \tag{31'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda (F_1^* F_1 + F_3^* F_3) e^{-i\lambda x} d\lambda = 0 , \qquad x \in C [0 , 1] \tag{32'}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F_1^{**} F_1 + F_3^{**} F_3) e^{-i\lambda x} d\lambda = 0 , \qquad x \in C [0 , 1] . \tag{33'}$$

Ces conditions ainsi que (25), (26) et (27) déterminent ensemble les fonctions F_1, F_2, F_3.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. P. GREENSPAN et G. F. CARRIER, « J. Fluid Mech », *6*, 77 (1959); *7*, 22 (1960).
[2] L. DRAGOS et N. MARCOV, « J. Mécanique », *7*, 379 (1968).
[3] N. MARCOV, *Studii şi Cercetări Matematice*, *20* (1968).
[4] L. DRAGOS, « Quart. Appl. Math. » (à paraître, 1969).