Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Su alcune formule integrali in magneto-idrodinamica. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.6, p. 502–506.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_6_502_0>

Magnetoidrodinamica. — *Su alcune formule integrali in magneto-idrodinamica.* Nota II [(*)] del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — With reference to the results of our " Note I ", we now consider the motion of the fluid in a fixed vessel with rigid wall. We establish new equations for the motion, and utilizing opportunely the theory of the newtonian potential, by means of the Clebsch theorem we reduce the question to determine a vector $\boldsymbol{u}$, that satisfies the equation of the wave which propagates in the direction of the applied magnetic field, and to determine a harmonic function of which are known the boundary values of the normal derivative.

1. In questa seconda Nota mi riferisco al caso in cui il fluido conduttore incompressibile si muove in un recipiente fisso con pareti rigide. Utilizzando allora i risultati della Nota I [(1)], e le proprietà generali del potenziale newtoniano, stabilisco innanzitutto, per la velocità delle particelle fluide, un'equazione differenziale del 2° ordine, che è quella di propagazione ondosa secondo l'asse z, il cui secondo membro dipende dalle forze non elettromagnetiche e da un'opportuna funzione armonica f da determinare.

Decomponendo quindi la velocità, secondo il teorema di Clebsch, nella somma del gradiente di un'altra funzione armonica Φ e del rotore di un vettore incognito $\boldsymbol{u}$, riduco la questione alla determinazione del vettore $\boldsymbol{u}$ soddisfacente all'equazione delle onde nella direzione dell'asse z, il cui secondo membro dipende solo dalle forze applicate, non elettromagnetiche, ed è precisamente il rotore di un potenziale vettore di volume la cui densità è la derivata temporale della forza. Questo vettore $\boldsymbol{u}$ risulta allora univocamente ed esplicitamente determinato in base ad assegnate condizioni iniziali.

Dopo ciò della funzione armonica Φ risultano noti i valori della derivata normale sul contorno ed essa è determinabile mediante la risoluzione di un problema di Neumann.

Avuta la funzione Φ si ha, con operazioni di derivazione, l'altra funzione armonica f, precedentemente introdotta. Infine si ha la pressione con una quadratura rispetto al tempo.

Nel caso particolare in cui le forze applicate derivano da un potenziale U, la questione si semplifica notevolmente e i risultati risultano più semplici introducendo un'opportuna funzione P della pressione e del potenziale.

2. Riferendoci al caso in cui il fluido si muove in un recipiente rigido fisso che occupa un volume S, limitato da una superficie σ, ci proponiamo di stabilire ora delle formule integrali che diano le componenti della velo-

(*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1968.

(1) C. AGOSTINELLI. *Su alcune formule integrali in magnetoidrodinamica*. Nota I. Questi « Rendiconti », vol. XLV, fasc. 5, 1968.

città $\boldsymbol{v}$ delle particelle fluide e quindi la pressione p. Sul contorno del volume considerato dovremo avere $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0$, essendo $\boldsymbol{n}$ il versore della normale alla superficie σ (diretta verso l'interno).

Per questo osserviamo che dalla (11) della Nota I, in base alla teoria del potenziale newtoniano, si ha

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \frac{\partial w}{\partial z} = f(x, y, z, t) - \frac{1}{4\pi} \int_S \operatorname{div}_{P'} \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \frac{dS}{r}, \tag{1}$$

dove f è una funzione armonica per il momento arbitraria, ed r è la distanza di un punto P interno ad S da un altro punto P′ variabile in S.

Sostituendo nella (6′) della stessa nota si ottiene

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} = -\operatorname{grad}_P f + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_P \int_S \operatorname{div}_{P'} \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \frac{dS}{r} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}. \tag{2}$$

Ora, essendo Δ_2 l'operatore di Laplace, in un punto interno al volume S possiamo scrivere

$$\frac{\partial \mathbf{F}(P, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \Delta_2 \int_S \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \frac{dS}{r} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot}_P \operatorname{rot}_P - \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P) \int_S \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \frac{dS}{r},$$

e quindi la (2) diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} = -\operatorname{grad}_P \left\{ f + \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{div}_P \int_S \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \frac{dS}{r} - \int_S \operatorname{div}_{P'} \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \cdot \frac{dS}{r} \right) \right\} + \\ + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_P \operatorname{rot}_P \int_S \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \cdot \frac{dS}{r}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ma risulta

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}_P \int_S \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \frac{dS}{r} - \int_S \operatorname{div}_{P'} \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \cdot \frac{dS}{r} = \\ &= -\int_S \left[\frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \times \operatorname{grad}_{P'} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \operatorname{div}_{P'} \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \right] ds = -\int_S \operatorname{div}_{P'} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \right] \cdot ds = \\ &= \int_\sigma \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \times \boldsymbol{n} \cdot \frac{d\sigma}{r}, \end{aligned}$$

dove l'integrale di superficie dell'ultimo membro è un potenziale di semplice strato ed è quindi una funzione armonica nei punti interni al volume S.

Pertanto la (3) si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} = -\operatorname{grad}_P \left\{ f + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \times \boldsymbol{n} \frac{d\sigma}{r} \right\} + \\ + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_P \operatorname{rot}_P \int_S \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \cdot \frac{dS}{r}. \end{aligned} \tag{4}$$

Per soddisfare questa equazione poniamo

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \tag{5}$$

con Φ funzione armonica, in modo che sia $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$.

Sostituendo nella (4) questa si soddisfa ponendo

$$f(\mathrm{P}, t) = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{\partial \mathbf{F}(\mathrm{P}', t)}{\partial t} \times \boldsymbol{n} \cdot \frac{d\sigma}{r} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_{\mathrm{P}} \int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathrm{P}', t)}{\partial t} \frac{d\mathrm{S}}{r}. \tag{7}$$

Dalla (6) risulta che la funzione f nei punti interni al volume S è armonica, tale essendo la funzione Φ, e così pure l'integrale di superficie.

Poiché sul contorno deve essere $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0$, e quindi per la (5)

$$\frac{d\Phi}{dn} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}, \tag{8}$$

la questione è ridotta a determinare il vettore $\boldsymbol{u}$ soddisfacente alla (7) e ad eventuali condizioni iniziali. Dopo ciò la Φ sarà una funzione armonica della quale sono noti i valori della derivata normale sul contorno, e si determina quindi risolvendo un problema di Neumann.

Al riguardo è opportuno osservare che per l'identità $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$, e per il teorema della divergenza risulta

$$\int_\sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0,$$

e pertanto risulta verificata la necessaria condizione

$$\int_\sigma \frac{d\Phi}{dn}\, d\sigma = 0.$$

Ponendo ora

$$\xi = z + at \quad , \quad \eta = z - at, \tag{9}$$

la (7) fornisce l'integrale

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1(x, y, \xi) + \boldsymbol{u}_2(x, y, \eta) - \tag{10}$$

$$\frac{1}{16\pi a^2} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi \int_{\eta_0}^{\eta} \left[\operatorname{rot}_{\mathrm{P}} \int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathrm{P}', t)}{\partial t} \frac{d\mathrm{S}}{r}\right]_{\substack{z = \frac{\xi+\eta}{2} \\ t = \frac{\xi-\eta}{2a}}} d\eta, \quad \begin{pmatrix} \xi_0 = z_0 + at_0 \\ \eta_0 = z_0 - at_0 \end{pmatrix},$$

con $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ vettori arbitrari degli argomenti indicati fra parentesi, che si possono determinare in base ad assegnate condizioni iniziali.

Invero, se indichiamo con $\boldsymbol{v}_0(x, y, z)$ e $\dot{\boldsymbol{v}}_0(x, y, z)$ i valori di $\boldsymbol{v}$ e di $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ per $t = 0$, si potrà sempre porre

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_0 = \operatorname{grad} \Phi_0(x, y, z) + \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_0(x, y, z) \\ &\dot{\boldsymbol{v}}_0 = \operatorname{grad} \dot{\Phi}_0(x, y, z) + \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{u}}_0(x, y, z). \end{aligned} \tag{11}$$

Noti i vettori $\boldsymbol{u}_0$ e $\dot{\boldsymbol{u}}_0$ $\left(\text{valori iniziali di } \boldsymbol{u} \text{ e di } \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)$, dalla (10) ricaviamo per $t = 0$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_1(x, y, z) + \boldsymbol{u}_2(x, y, z) = \\ &= \boldsymbol{u}_0 + \frac{1}{16\pi a^2} \int_{z_0}^{z} d\xi \int_{z_0}^{z} \left[\operatorname{rot}_P \int_S \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \frac{dS}{r} \right]_{\substack{z = \frac{1}{2}(\xi+\eta) \\ t = \frac{1}{2a}(\xi-\eta)}} d\eta \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &a \frac{\partial}{\partial z} \{\boldsymbol{u}_1(x, y, z) - \boldsymbol{u}_2(x, y, z)\} = \dot{\boldsymbol{u}}_0 + \\ &+ \frac{1}{16\pi a} \left\{ \int_{z_0}^{z-at} \left[\operatorname{rot}_P \int_S \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \frac{dS}{r} \right]_{\substack{z = \frac{1}{2}(\xi+\eta) \\ t = \frac{1}{2a}(\xi-\eta)}} d\eta - \right. \\ &\left. - \int_{z_0}^{z+at} \left[\operatorname{rot}_P \int_S \frac{\partial \mathbf{F}(P', t)}{\partial t} \frac{dS}{r} \right]_{\substack{z = \frac{1}{2}(\xi+\eta) \\ t = \frac{1}{2a}(\xi-\eta)}} d\xi \right\}_{t=0} . \end{aligned} \tag{13}$$

Dalla (13) con una integrazione rispetto a z, si ha la differenza $\boldsymbol{u}_1(x, y, z) - \boldsymbol{u}_2(x, y, z)$. Sommando e sottraendo con la (12) si ricavano i vettori $\boldsymbol{u}_1(x, y, z)$, $\boldsymbol{u}_2(x, y, z)$, e conseguentemente i vettori $\boldsymbol{u}_1(x, y, z+at)$, $\boldsymbol{u}_2(x, y, z-at)$.

Il vettore $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ risulta così completamente determinato. Dopo ciò la funzione Φ è determinata dalla risoluzione del problema di Neumann

$$\Delta_2 \Phi = 0, \text{ in S} \quad ; \quad \frac{d\Phi}{dn} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}, \text{ sopra } \sigma. \tag{14}$$

La (6) porge poi la funzione f. Infine, essendo già noto il vettore velocità $\boldsymbol{v}$, e quindi la sua componente w secondo l'asse z, la (1) fornisce la pressione p con una quadratura rispetto al tempo.

3. Le formule stabilite sussistono anche nel caso in cui la forza $\mathbf{F}$ deriva da un potenziale U ($\mathbf{F} = \operatorname{grad}$ U).

Ma in questo caso è più semplice procedere in questo modo: posto $\mathcal{S} = \frac{p}{\rho} - U$, si ha (cfr. Nota I, formula (19) e (20)]:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + a^2 \frac{\partial w}{\partial z} = f(x, y, z, t) \tag{15}$$

e

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2} = -\operatorname{grad} f, \tag{16}$$

con f funzione armonica.

Posto $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$, si ha ora

$$f = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial z^2} = 0. \tag{18}$$

Il vettore $\boldsymbol{u}$ è quindi della forma

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 (x, y, z + at) + \boldsymbol{u}_2 (x, y, z - at) \tag{19}$$

dove i vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ si determinano in base alle condizioni iniziali. Precisamente, se $\boldsymbol{v}_0$ e $\dot{\boldsymbol{v}}_0$ sono i valori di $\boldsymbol{v}$ e di $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$, per $t = 0$, ed $\boldsymbol{u}_0$, $\dot{\boldsymbol{u}}_0$ i corrispondenti valori di $\boldsymbol{u}$ e $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$, si ha

$$\boldsymbol{u}_1 (x, y, z) + \boldsymbol{u}_2 (x, y, z) = \boldsymbol{u}_0 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{u}_1 (x, y, z) - \boldsymbol{u}_2 (x, y, z) = \frac{1}{a} \int_{z_0}^{z} \dot{\boldsymbol{u}}_0 \, \mathrm{d}z, \tag{21}$$

da cui per somma e sottrazione si ricavano i vettori $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$.

La funzione armonica Φ si determina al solito risolvendo un problema di Neumann, dovendo essere sul contorno $\frac{d\Phi}{dn} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}$.