Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enrico Bompiani

Configurazioni associate ad una calotta superficiale del quarto ordine in uno spazio proiettivo tridimensionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.6, p. 494–501.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_6_494_0>

Geometria differenziale. — *Configurazioni associate ad una calotta superficiale del quarto ordine in uno spazio proiettivo tridimensionale.* Nota [(*)] del Socio ENRICO BOMPIANI.

SUMMARY. — New canonical forms and new projective reference systems associated with a fourth order surface cap of the ordinary space.

1. – INTRODUZIONE.

In una Memoria del 1880 [(1)] G. Darboux dette le prime nozioni relative ad intorni di ordine superiore al secondo di un punto regolare (cioè con piano tangente determinato) di una superficie [(2)] dell'ordinario spazio proiettivo (tangenti, polarità, quadriche di Darboux).

All'inizio di questo secolo, col fiorire di due indirizzi diversi (E. J. Wilczynski, 1907; G. Fubini, 1916) di geometria proiettivo-differenziale (G.P.D.) delle superficie [(3)] furono trovate per vie diverse (alcune geometriche altre analitiche) numerose rette associate intrinsecamente ad una calotta σ_2^4 passanti per il suo centro e non giacenti nel piano ivi tangente che ora vengono genericamente indicate col nome di *normali proiettive* [(4)] (di Fubini, di Wilczynski, di Green, di Darboux-Segre o di Čech, di Bompiani, β– e γ– di Sullivan).

Il Darboux si servì di sviluppi locali e trovò per la rappresentazione di σ_2^4 due *forme canoniche*: pur non avendolo esplicitamente rilevato, poiché ogni forma canonica implica la determinazione intrinseca di un riferimento

(*) Presentata nella seduta del 14 dicembre 1968.

(1) G. DARBOUX, *Sur le contact des courbes et des surfaces*, « Bulletin des Sciences Mathématiques », s. II, t. IV, 1880, première partie, pp. 348–384.

(2) Invece di intorno (di punti infinitamente vicini ad uno dato sopra una superficie) conviene parlare di *calotta*. Questa σ_2^r (l'indice 2 sta ad indicare che ci si riferisce a superficie) è un elemento dell'insieme quoziente, rispetto alla nozione di contatto d'ordine r, della totalità delle superficie passanti regolarmente (cioè con piano tangente ben individuato) per un punto *centro* della calotta. Si veda per esempio la mia Nota: *Calotte superficiali del quinto ordine nello spazio proiettivo tridimensionale*, « Rivista Matem. Univ. di Parma », (2) 7 (1968) pp. 1–13.

(3) Si vedano sull'argomento i seguenti trattati: G. FUBINI e E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, N. Zanichelli Editore; t. I (1926), t. II (1927);

G. FUBINI e E. ČECH, *Introduction à la Géométrie Projective Différentielle des Surfaces*, Gauthier-Villars et C. Editeurs, Paris 1931.

G. BOL, *Projektive Differentialgeometrie*, Vandenhoec & Ruprecht in Göttingen; 1 Teil 1950, 2 Teil 1954, 3 Teil 1967. Un'ampia bibliografia sull'argomento si trova nella Introduction di Fubini e Čech e nella prima e terza parte del trattato del Bol.

(4) Si veda particolarmente la II parte del trattato del Bol (§ 82, pp. 34–42) ove sono elencate (a p. 35) in quest'ordine.

proiettivo (con uno spigolo del tetraedro per il centro di σ_2^4 e $\notin$ al piano tangente), egli aveva già determinato due normali proiettive.

Riprendo il metodo di Darboux per esporre altre configurazioni intrinsecamente associate ad una σ_2^4 (ed altre forme canoniche).

2. – ALCUNI RICHIAMI. FORME CANONICHE DI DARBOUX.

Una calotta σ_2^3, di centro O, a tangenti asintotiche reali e distinte (iperbolica) nessuna delle quali quadripunta può sempre rappresentarsi, in infiniti riferimenti, nella forma

$$z = xy + x^3 + y^3 + [4] \tag{2.1}$$

che viene conservata per qualsiasi trasformazione del tipo

$$x = \frac{x' - qz'}{1 - D} \quad , \quad y = \frac{y' - pz'}{1 - D} \quad , \quad z = \frac{z'}{1 - D} \quad , \quad D = px' + qy' + rz'. \tag{2.2}$$

Una σ_2^4, in uno dei riferimenti precedenti relativi alla sua σ_2^3,

$$z = xy + x^3 + y^3 + \varphi_4(x, y) + [5] \tag{2.3}$$

si trasforma, per la (2.2), in

$$z' = x'y' + x'^3 + y'^3 + \Phi_4(x', y') + [5] \tag{2.4}$$

ove

$$\varphi_4(x, y) \equiv a_4 x^4 + 4 a_{31} x^3 y + 6 a_{22} x^2 y^2 + 4 a_{13} xy^3 + a_{04} y^4 \tag{2.5}$$

e

$$\begin{aligned}\Phi_4(x', y') \equiv px'^4 - 2 qx'^3 y' + (r + pq) x'^2 y'^2 - \\ - 2 px' y'^3 + qy'^4 + \varphi_4(x', y')\end{aligned} \tag{2.6}$$

cioè, indicando con apici i coefficienti di $\Phi_4(x', y')$:

$$\begin{matrix} a'_{40} = p + a_{40} \\ a'_{04} = q + a_{04} \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} 4 a'_{31} = -2 q + 4 a_{31} \\ 4 a'_{13} = -2 p + 4 a_{13} \end{matrix} \quad , \quad 6 a'_{22} = r + pq + 6 a_{22}. \tag{2.7}$$

La determinazione di un riferimento $\mathfrak{R}$ dipende da quella di p, q, r cioè da *tre* relazioni indipendenti fra i coefficienti di $\Phi_4(x', y')$.

È chiaro che può sempre farsi $a'_{31} = a'_{13} = a'_{22} = 0$; e se già nel riferimento iniziale $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ è

$$a_{31} = a_{13} = a_{22} = 0 \tag{I}$$

queste condizioni si mantengono per $p = q = r = 0$, cioè è individuata la forma

$$\varphi_4^{\mathrm{I}}(x, y) \equiv ax^4 + by^4$$

e con essa il riferimento $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ e gli *invarianti* a, b. La retta di $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ per O non contenuta nel piano ivi tangente s'indicherà con N^{I} (*normale proiettiva* N^{I}).

Si possono invece imporre le condizioni

$$\text{(II)} \qquad a'_{40} = a'_{04} = a'_{22} = 0$$

e se si parte dalla φ_4^{I} come forma di riferimento ciò avviene per $p = -a$, $q = -b$, $r = -ab$. Queste relazioni individuano la forma

$$\varphi_4^{\mathrm{II}}(x', y') \equiv 2\,x'\,y'\,(bx'^2 + ay'^2)$$

e il riferimento $\mathfrak{R}^{\mathrm{II}}$ al quale si passa da $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ con le relazioni (in coordinate omogenee)

$$(2.8) \qquad \rho x = x' + bz' \quad , \quad \rho y = y' + az' \quad , \quad \rho z = z' \quad , \quad \rho t = t' + ax' + by' + abz' .$$

Le forme $\varphi_4^{\mathrm{I}}(x, y)$ e $\varphi_4^{\mathrm{II}}(x', y')$ si trovano già in Darboux (l. c.).

3. – Precisazioni geometriche.

Vogliamo ora aggiungere qualche precisazione di carattere geometrico.

Le calotte σ_2^4 dell'ordinario spazio proiettivo sono ∞^{17}: poiché si hanno due soli invarianti proiettivi a, b quell'insieme ∞^{17} rispetto all'equivalenza proiettiva dà luogo a soli ∞^2 elementi (dell'insieme quoziente). Questi si possono interpretare come punti $(b, a, 1, ab)$ della quadrica $\mathrm{Q}: xy = zt$ da cui siano tolte le tangenti asintotiche (per le quali $z = 0$); o come trasformazioni proiettive del gruppo G_2, rappresentato dalle (2.8). Queste lasciano invariata la quadrica Q, il centro O della calotta e le singole rette ivi tangenti alla quadrica subordinando sulle generatrici per O proiettività paraboliche (determinate da a, b) con punto doppio in O.

Precisiamo geometricamente le relazioni fra i riferimenti $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ (relativo a φ_4^{I}) e $\mathfrak{R}^{\mathrm{II}}$ (relativo a φ_4^{II}).

La normale proiettiva N^{II} (per O ma non appartenente al piano tangente) di $\mathfrak{R}^{\mathrm{II}}$, cioè $x' = y' = 0$ ha in $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ le equazioni $x = bz$, $y = az$; essa quindi contiene il punto rappresentativo della calotta su Q; o anche N^{II} è la trasformata di N^{I} per la proiettività di G_2 definita da a e b (e il punto rappresentativo di σ_2^4 su Q è il trasformato del punto improprio, $x = y = t = 0$, di N^{I}). Il piano tangente a Q nel punto rappresentativo della calotta è il piano improprio ($t' = 0$ ossia $t = ax + by + abz$) di $\mathfrak{R}^{\mathrm{II}}$.

Il punto unità di $\mathfrak{R}^{\mathrm{II}}$ è nell'intersezione $\neq$ O della retta rappresentata (in $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$) da $x = (b + 1)\,z$, $y = (a + 1)\,z$ con la quadrica Q. Una generatrice di questa rappresenta le ∞^1 calotte per cui uno degli invarianti ha lo stesso valore.

Le calotte per le quali è costante il rapporto degli invarianti si rappresentano su una conica di Q appartenente ad un piano per N^{I}: questo piano passa per il punto unità di $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ se gli invarianti sono uguali.

Sono così chiariti i rapporti geometrici fra $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ e $\mathfrak{R}^{\mathrm{II}}$.

4. – UN'ALTRA FORMA CANONICA.

Imponiamo le condizioni

(III) $$a'_{40} = a'_{04} = \mathrm{A} \quad , \quad a'_{31} = -a'_{13} = \mathrm{B} \quad , \quad a'_{22} = 0.$$

A norma delle (2.7) (per $a_{40} = a$, $a_{04} = b$, $a_{22} = a_{31} = a_{13} = 0$) si ha

(4.1) $$p = -q = \frac{b-a}{2} \quad , \quad r = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad , \quad \mathrm{A} = \frac{a+b}{2} \quad , \quad 2\,\mathrm{B} = \frac{b-a}{2}$$

la forma canonica

$$\varphi_4^{\mathrm{III}}(x', y') \equiv \mathrm{A}\,(x'^4 + y'^4) + 4\,\mathrm{B}\,x'\,y'\,(x'^2 - y'^2)$$

e la trasformazione che porta da $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ a $\mathfrak{R}^{\mathrm{III}}$ (riferimento relativo alle III)

(4.2) $$\rho x = x' + 2\,\mathrm{B}z' \quad , \quad \rho y = y' - 2\,\mathrm{B}z' \quad , \quad \rho z = z',$$
$$\rho t = t' - 2\,\mathrm{B}\,(x' - y') - 4\,\mathrm{B}^2\,z'.$$

La normale proiettiva $\mathrm{N}^{\mathrm{III}}(x'=y'=0)$ ha in $\mathfrak{R}^{\mathrm{I}}$ le equazioni $x = -y = 2\,\mathrm{B}z$ e al variare di B descrive un fascio nel piano $x + y = 0$ (che contiene N^{I}). Il punto unità di $\mathfrak{R}^{\mathrm{III}}$ sta sulla retta $x = (1 + 2\,\mathrm{B})\,z$, $y = (1 - 2\,\mathrm{B})\,z$ e sulla quadrica Q. Il gruppo G_1 (4.2) lascia fissi Q, O e ogni piano del fascio che ha per asse la retta $x + y = z = 0$. Uno qualsiasi di questi piani sega Q in una conica i cui punti rappresentano σ_2^4 con la stessa differenza di invarianti; il piano $\mathrm{N}^{\mathrm{I}}\,\mathrm{N}^{\mathrm{III}}$ $(x + y = 0)$ dà le σ_2^4 ad invarianti uguali.

Analoghe alle (III) sono le condizioni

(IV) $$a'_{40} = -a'_{04} \quad , \quad a'_{31} = a'_{13} \quad , \quad a'_{22} = 0$$

per le quali

$$p = q = -\frac{a+b}{2} \quad , \quad r = -pq$$

$$\varphi_4^{\mathrm{IV}}(x', y') \equiv \frac{a-b}{2}\,(x'^4 - y'^4) + (a + b)\,x'\,y'\,(x'^2 + y'^2).$$

La normale proiettiva N^{IV} è $x = y = \frac{a+b}{2}\,z$ e dipende dalla sola somma degli invarianti.

5. – FORME CANONICHE DIPENDENTI DA UN PARAMETRO.

Le condizioni finora esaminate (I, II, III, IV) possono estendersi ponendo condizioni dipendenti da un parametro.

Cominciamo dalle condizioni

(V) $$a'_{04} = \lambda a'_{40} \quad , \quad a'_{13} = \lambda a'_{31} \quad , \quad a'_{22} = 0$$

sempre partendo dalla forma $\varphi_4^{\mathrm{I}}(x, y)$.

Si trova per $\lambda \neq \pm 1$

$$p = \lambda \frac{b - \lambda a}{\lambda^2 - 1} \quad , \quad q = \frac{b - \lambda a}{\lambda^2 - 1} \quad , \quad r = - pq$$

$$\varphi^{V}_{4,\lambda}(x', y') \equiv \frac{\lambda b - a}{\lambda^2 - 1} \{x'^4 + \lambda y'^4\} - 2 \frac{b - \lambda a}{\lambda^2 - 1} x' y' (x'^2 + \lambda y'^2).$$

Il luogo delle normali proiettive N^{V}_{λ} (così indicando la normale relativa al valore di λ e alla forma φ^{V}) è il cono (di vertice O)

$$y^2 - x^2 = (ay - bx) z$$

e il luogo del punto-unità è una quartica razionale (con punto doppio per $\lambda = \pm 1$).

Per $\lambda = b/a$, $\lambda = a/b$ si hanno rispettivamente le forme φ^{I}_4, φ^{II}_4 di Darboux.

Per $\lambda = 0$ si ha $\varphi^{V}_{4,0} \equiv x'^3 (ax' + 2by')$; per $\lambda = \infty$, $\varphi^{V}_{4,\infty} \equiv y'^3 (2ax' + by')$.

Passiamo alle condizioni

$$\text{(VI)} \qquad a'_{04} = \lambda a'_{40} \quad , \quad a'_{13} = - \lambda a'_{31} \quad , \quad a'_{22} = 0.$$

Si ha

$$p = - \lambda \frac{\lambda a - b}{\lambda^2 + 1} \quad , \quad q = \frac{\lambda a - b}{\lambda^2 + 1} \quad , \quad r = - pq$$

$$\varphi^{VI}_{4,\lambda}(x', y') \equiv \frac{a + \lambda b}{\lambda^2 + 1} \{x'^4 + \lambda y'^4\} - 2 \frac{\lambda a - b}{\lambda^2 + 1} x' y' \{x'^2 - \lambda y'^2\}.$$

Per $\lambda = b/a$ e $\lambda = - a/b$ si riottengono le forme φ^{I}_4, φ^{II}_4 e per $\lambda = 0$ e $\lambda = \infty$ le forme $\varphi^{V}_{4,0}$, $\varphi^{V}_{4,\infty}$.

Per $\lambda = a/b$ si ha la forma

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} \{bx'^4 + ay'^4\} + \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x' y' \{bx'^2 - ay'^2\}$$

e per $\lambda = - b/a$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \{ax'^4 - by'^4\} + \frac{2ab}{a^2 + b^2} x' y' \{ax'^2 + by'^2\}.$$

Il luogo delle normali N^{VI}_{λ} al variare di λ è

$$x^2 + y^2 + (bx + ay) z = 0.$$

Se nelle condizioni (V) si scambiano gli indici 1, 3 cioè per le condizioni

$$\text{(VII)} \qquad a'_{04} = \lambda a'_{40} \quad , \quad a'_{31} = \lambda a'_{13} \quad , \quad a'_{22} = 0$$

si ha (per $\lambda \neq 1$)

$$p = \frac{\lambda b - a}{1 - \lambda^2} \quad , \quad q = \lambda \frac{\lambda b - a}{1 - \lambda^2} \quad , \quad r = - pq$$

$$\varphi^{VII}_{4,\lambda}(x', y') \equiv \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda^2} \{\lambda x'^4 + y'^4\} + 2 \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda^2} x' y' \{\lambda x'^2 + y'^2\}$$

e il cono delle normali proiettive N_λ^{VII} è

$$y^2 - x^2 + (x + ay) z = 0$$

e per i valori $\lambda = a/b$, b/a, ∞, 0 si hanno ordinatamente le forme φ_4^{I}, φ_4^{II}, $\varphi_{4,0}^{IV}$, $\varphi_{4,\infty}^{IV}$.

Con lo stesso scambio di indici per le (V) cioè per

$$\text{(VIII)} \qquad a'_{04} = \lambda a'_{40} \quad , \quad a'_{31} = -\lambda a'_{13} \quad , \quad a'_{22} = 0$$

si ha

$$p = \frac{b - \lambda a}{2\lambda} \quad , \quad q = -\frac{b - \lambda a}{\lambda} \quad , \quad r = -pq$$

$$\varphi_{4,\lambda}^{VIII}(x', y') \equiv \frac{b + \lambda a}{2\lambda} \{x'^4 + \lambda y'^4\} + \frac{b - \lambda a}{\lambda} x' y' \{\lambda x'^2 - y'^2\}$$

e il luogo delle normali N_λ^{VIII} è

$$2xy + (ax - by) z = 0$$

Per $\lambda = b/a$, $-b/a$ si hanno ordinatamente le forme φ_4^{I}, φ_4^{II}; per $\lambda = +1$, -1 le forme φ_4^{III}, φ_4^{IV}.

Prendiamo ora relazioni che leghino un coefficiente di una quarta potenza con un coefficiente che non sia tale (sempre nella forma trasformata); per esempio

$$\text{(IX)} \qquad 4a'_{31} = 2\lambda a'_{04} \quad , \quad 4a'_{13} = 2\lambda a'_{40} \quad , \quad a'_{22} = 0 .$$

Da esse, per $\lambda \neq -1$,

$$p = -\frac{\lambda}{\lambda + 1} a \quad , \quad q = -\frac{\lambda}{\lambda + 1} b \quad , \quad r = -pq$$

$$\varphi_{4,\lambda}^{IX}(x', y') \equiv \frac{1}{\lambda + 1} \{ax'^4 + by'^4\} + \frac{2\lambda}{\lambda + 1} x' y' \{bx'^2 + ay'^2\} .$$

Questa dà per $\lambda = 0$, ∞ le forme φ_4^{I}, φ_4^{II} e per $\lambda = 1/2$ la forma

$$\frac{2}{3} (x'^3 + y'^3)(ax' + by')$$

già da me introdotta per via geometrica [5].

Il luogo delle normali proiettive N^{IX} al variare di λ è il piano (per N^{I})

$$ax = by.$$

Questo è il *piano canonico* nel quale stanno le normali di Wilczynski, Green, Fubini, Čech e Bompiani per le forme canoniche delle quali sono soddisfatte le (IX).

(5) E. BOMPIANI, *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, « Rend. del Semin. Matem. dell'Università di Roma », s. IV, vol. II, 1938, pp. 3-24.

Il luogo del punto unità è la conica

$$xy = zt \quad , \quad ax - by = (a - b)\, z .$$

Se al posto delle (IX) prendiamo le

$$\text{(X)} \qquad 4\, a'_{31} = 2\, \lambda a'_{40} \quad , \quad 4\, a'_{13} = -2\, \lambda a'_{04} \quad , \quad a'_{22} = 0$$

troviamo, per $\lambda \neq \pm 1$

$$p = -\frac{\lambda}{\lambda - 1}\, a \quad , \quad q = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}\, b \quad , \quad r = -pq$$

$$\varphi^{\mathrm{X}}_{4,\lambda}(x', y') \equiv \frac{ax'}{\lambda - 1} \{-x'^3 + 2\, \lambda y'^3\} + \frac{by'}{\lambda + 1} \{y'^3 + 2\, \lambda x'^3\}$$

e come luogo delle normali proiettive $\mathrm{N}^{\mathrm{X}}_{4,\lambda}$

$$2\, xy = (ax + by)\, z .$$

Per $\lambda = 0$ si riottiene la φ^{I}_4 e per $\lambda = \infty$ la φ^{II}_4.

Scambiando poi in (IX) gli indici 1, 3 (0 0, 4) si hanno le relazioni

$$\text{(XI)} \qquad 4\, a'_{31} = 2\, \lambda a'_{40} \quad , \quad 4\, a'_{13} = 2\, \lambda a'_{04} \quad , \quad a'_{22} = 0$$

e per esse (per $\lambda \neq \pm 1$) si ha

$$p = -\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (\lambda a - b) \quad , \quad q = -\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (\lambda b - a)$$

$$\varphi^{\mathrm{XI}}_{4,\lambda}(x', y') \equiv \frac{\lambda b - a}{\lambda^2 - 1}\, x'^3 \{x' + 2\, \lambda y'\} + \frac{\lambda a - b}{\lambda^2 - 1}\, y'^3 \{2\, \lambda x' + y'\} .$$

Di nuovo per $\lambda = b/a$, a/b si riottengono φ^{I}_4 , φ^{II}_4. Il luogo delle normali proiettive $\mathrm{N}^{\mathrm{XI}}_{\lambda}$ è

$$x^2 - y^2 = (ay - bx)\, z .$$

Infine scambiando nella (X) gli indici 1, 3 (0 0, 4) si hanno le condizioni:

$$\text{(XII)} \qquad 4\, a'_{31} = 2\, \lambda a'_{40} \quad , \quad 4\, a'_{13} = -2\, \lambda a'_{04} \quad , \quad a'_{22} = 0$$

dalle quali, sempre per le (2.7)

$$p = -\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} (\lambda a - b) \quad , \quad q = -\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} (\lambda b + a) \quad , \quad r - = pq$$

$$\varphi^{\mathrm{XII}}_{4,\lambda}(x', y') \equiv \frac{a - \lambda b}{\lambda^2 + 1}\, x'^3 \{x' + 2\, \lambda y'\} + \frac{b - \lambda a}{\lambda^2 + 1}\, y'^3 \{-2\, \lambda x' + y'\} .$$

Il luogo delle normali $\mathrm{N}^{\mathrm{XII}}_{\lambda}$ è

$$x^2 + y^2 = (bx + ay)\, z .$$

Per i valori di λ dati nella 1ª colonna si hanno le forme accanto indicate:

$$\lambda = 0 \quad : \varphi_4^{\mathrm{I}}$$

$$\lambda = \infty \quad : 2\,x'\,y'\,\{-\,bx'^2 + ay'^2\}$$

$$\lambda = b/a \quad : \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,x'^3\,\{ax' + 2\,by'\}$$

$$\lambda = a/b \quad : \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,y'^3\,\{2\,ax' - by'\}$$

$$\lambda = -\,b/a : x'^3\,\{ax' - 2\,by'\} + \frac{2\,ab}{a^2 + b^2}\,y'^3\,\{2\,bx' + ay'\}$$

$$\lambda = -\,a/b : \frac{2\,ab}{a^2 + b^2}\,x'^3\,\{ba' - 2\,ay'\} + y'^3\,\{2\,ax' + by'\}\,.$$