Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Lucilla Bassotti

Sottospazi invarianti per l'operatore dell'elasticità in un cubo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.6, p. 485–493.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_6_485_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Analisi numerica. — *Sottospazi invarianti per l'operatore dell'elasticità in un cubo* (*). Nota di LUCILLA BASSOTTI, presentata (**) dal Corrisp. G. FICHERA.

SUMMARY. — It is shown that the space of 3–vector valued functions on a cube of S_3 is direct sum of 16 subspaces, each of them being invariant for the linear differential operator of classical elasticity.

In questa Nota viene studiato il seguente problema.

Nello spazio cartesiano delle tre variabili reali x_1, x_2, x_3 si consideri il cubo C definito dalle limitazioni $|x_k| < a$ $(k = 1, 2, 3)$ (a numero positivo assegnato) e, in C, l'*operatore vettoriale dell'elasticità*

$$L = \Delta_2 + \sigma \operatorname{grad} \operatorname{div}$$

con σ costante positiva assegnata. Si consideri la varietà lineare Γ costituita dai vettori a tre componenti reali, funzioni continue con tutte le loro derivate di ogni ordine in C. Si vuole decomporre Γ in somma diretta di sottospazi tali che, operando su un vettore di ciascun sottospazio con l'operatore L, si ritrovi un vettore appartenente a questo sottospazio. Si vuole cioè decomporre Γ in *sottospazi invarianti* per L.

Nel presente lavoro pervengo ad una decomposizione di Γ in sedici sottospazi invarianti, ciascuno dei quali gode della ulteriore proprietà che, se u è un vettore continuo in $\bar{C}$ e nullo sulla frontiera di C, tali sono i suoi componenti in ciascuno dei sottospazi che operano la decomposizione.

È evidente l'interesse della decomposizione ottenuta per i problemi di approssimazione relativi all'elasticità in C. Infatti se i mezzi di calcolo a disposizione consentono di spingere l'approssimazione fino a un certo ordine n, ad esempio usando per l'approssimazione n–esima matrici di ordine n, dopo ottenuta la decomposizione, può spingersi l'approssimazione fino all'ordine $16\,n$.

In vista di eventuali applicazioni ai problemi di autovalori per l'elasticità, ho dedicato l'ultima sezione della presente Nota a far vedere come il problema di autovalori per il problema elastico di un cubo isotropo fisso lungo il contorno si decomponga in sedici problemi relativi ad altrettanti sottospazi invarianti.

1. – Si consideri il sistema

$$\Delta_2 w_i + \sigma \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3}\right) = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

nelle incognite $w_i(x_1, x_2, x_3)$. Il numero σ è un arbitrario numero reale non negativo.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 21 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1968.

Introdotti i vettori $w \equiv (w_1, w_2, w_3)$ e $f \equiv (f_1, f_2, f_3)$ [1], (1.1) può scriversi:

$$\text{(1.1')} \qquad Lw = \Delta_2 w + \sigma \operatorname{grad} \operatorname{div} w = f.$$

Sia C il cubo definito dianzi e $\bar{C}$ la sua chiusura. Detto K (C) lo spazio vettoriale delle funzioni reali definite in C, si indichi con $K^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(C)$ il sottospazio K (C) costituito dalle funzioni simmetriche rispetto alla variabile x_i quando l'i–esimo indice α_i è nullo, antisimmetriche rispetto alla variabile x_i quando l'i–esimo indice α_i vale uno. Sussiste la seguente decomposizione di K (C) in somma diretta di sottospazi:

$$\text{(1.2)} \qquad K(C) = K^{000}(C) \oplus K^{001}(C) \oplus K^{010}(C) \oplus K^{100}(C) \oplus \oplus K^{110}(C) \oplus K^{011}(C) \oplus K^{101}(C) \oplus K^{111}(C).$$

Si riconosce facilmente che, assegnata una funzione $k(x_1, x_2, x_3)$ di K (C), la sua componente nel sottospazio $K^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(C)$ è data da

$$\text{(1.3)} \qquad k^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x_1, x_2, x_3) = 2^{-3}\,[k(x_1, x_2, x_3) + (-1)^{\alpha_1} k(-x_1, x_2, x_3) + (-1)^{\alpha_2} k(x_1, -x_2, x_3) + (-1)^{\alpha_3} k(x_1, x_2, -x_3) + (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} k(-x_1, -x_2, x_3) + (-1)^{\alpha_1+\alpha_3} k(-x_1, x_2, -x_3) + (-1)^{\alpha_2+\alpha_3} k(x_1, -x_2, -x_3) + (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} k(-x_1, -x_2, -x_3)].$$

In particolare, se $k(x_1, x_2, x_3)$ è definita in $\bar{C}$, allora le funzioni $k^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x_1, x_2, x_3)$ espresse da (1.3) sono definite in $\bar{C}$ e risulta:

$$\text{(1.}\bar{2}\text{)} \qquad K(\bar{C}) = K^{000}(\bar{C}) \oplus K^{001}(\bar{C}) \oplus K^{010}(\bar{C}) \oplus K^{100}(\bar{C}) \oplus \oplus K^{110}(\bar{C}) \oplus K^{011}(\bar{C}) \oplus K^{101}(\bar{C}) \oplus K^{111}(\bar{C}),$$

con ovvio significato dei simboli.

1.I. *Sia* $s_1\, s_2\, s_3$ *una permutazione degli indici* 1 2 3, $k(x_1, x_2, x_3)$ *una arbitraria funzione definita in* C. *Posto* $\tilde{x} = (x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3})$ e $g(x_1, x_2, x_3) = [k(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]_{\xi=\tilde{x}}$ *riesce*

$$\text{(1.4)} \qquad g^{\beta_{s_1}\beta_{s_2}\beta_{s_3}}(x_1, x_2, x_3) = [k^{\beta_1\beta_2\beta_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]_{\xi=\tilde{x}}, \qquad (\beta_i = 0, 1;\ i = 1, 2, 3).$$

Dimostrazione. – Sia $k(x_1, x_2, x_3)$ una arbitraria funzione definita in C e $k^{\beta_1\beta_2\beta_3}(x_1, x_2, x_3)$ le sue componenti nella decomposizione (1.2). Riesce, ovviamente, in base a (1.2), (1.3):

$$g(x_1, x_2, x_3) = [k(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]_{\xi=\tilde{x}} = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3}^{0,1} [k^{\beta_1\beta_2\beta_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]_{\xi=\tilde{x}}.$$

Per l'unicità della decomposizione (1.2), essendo $[k^{\beta_1\beta_2\beta_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]_{\xi=\tilde{x}}$ un elemento di $K^{\beta_{s_1}\beta_{s_2}\beta_{s_3}}$, si ha la tesi.

(1) D'ora in avanti se con una lettera, ad esempio w, indicherò un vettore, con la stessa lettera munita dell'indice i indicherò la sua componente i–esima w_i $(i = 1, 2, 3)$.

Si consideri lo spazio V (C) di tutti i vettori a tre componenti reali definite in C e i suoi sottospazi $V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ costituiti dai vettori $v \equiv (v_1, v_2, v_3)$ tali che

$$v_j \in K^{\alpha_1+(-1)^{\alpha_1}\delta_1^j\,,\ \alpha_2+(-1)^{\alpha_2}\delta_2^j\,,\ \alpha_3+(-1)^{\alpha_3}\delta_3^j} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

ove $\delta_i^j = 1$ se $i = j$, $\delta_i^j = 0$ se $i \neq j$.

Per ogni componente v_j di v, si considerino le otto componenti $v_j^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ definite da (1.3). Il vettore

$$(1.5) \qquad v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \equiv \left(v_1^{\alpha_1+(-1)^{\alpha_1},\alpha_2,\alpha_3}\,,\ v_2^{\alpha_1,\alpha_2+(-1)^{\alpha_2},\alpha_3}\,,\ v_3^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+(-1)^{\alpha_3}}\right)$$

appartiene a $V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$. Sussiste il seguente teorema:

1.II. *Lo spazio vettoriale* V (C) *è somma diretta di otto sottospazi, precisamente*:

$$(1.6) \qquad V(C) = V^{000} \oplus V^{001} \oplus V^{010} \oplus V^{100} \oplus V^{110} \oplus V^{011} \oplus V^{101} \oplus V^{111}.$$

Dimostrazione. – Si verifica facilmente che per ogni vettore v di V (C) si ha $v = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}^{0,1} v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, con $v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \in V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$. La unicità di tale decomposizione è conseguenza di (1.2).

Si introducano ora le trasformazioni lineari $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ dello spazio V (C) nel sottospazio $V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, definite dalle relazioni:

$$(1.7) \qquad P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\, v = v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \qquad (\alpha_i = 0, 1 ; i = 1, 2, 3)\ ^{(2)}.$$

1.III. *Le trasformazioni lineari* $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ *sono idempotenti. Inoltre se* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ *e* $\beta_1\beta_2\beta_3$ *sono due disposizioni distinte degli indici* 0, 1, *allora* $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}P^{\beta_1\beta_2\beta_3}$ *è la trasformazione nulla.*

La dimostrazione segue facilmente da (1.6).

Sia V ($\bar{C}$) la totalità dei vettori a tre componenti reali definite in $\bar{C}$. Se $v \in V(\bar{C})$, i vettori $v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v$ possono, tramite (1.3) e (1.5), pensarsi definiti in $\bar{C}$. Sussistono i due seguenti risultati la cui dimostrazione è conseguenza di (1.3):

1.IV. *Se* $v \in \Gamma^h(C)$, *allora* $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v \in \Gamma^h(C)$. *Se* $v \in \Gamma^h(\bar{C})$, *allora* $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v \in \Gamma^h(\bar{C})$ (3).

1.V. *Se* $v \in V(\bar{C})$ *ed è nullo su* $\mathcal{F}C$, *allora* $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v$ *è nullo su* $\mathcal{F}C$.

Si ha inoltre

1.VI. *Se* $v \in \Gamma^2(C)$, *allora* $LP^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v = P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} Lv$.

(2) Si osservi che se v è costante, $P^{100}v \equiv (v_1, 0, 0)$, $P^{010}v \equiv (0, v_2, 0)$, $P^{001}v \equiv (0, 0, v_3)$ e $P^{000}v = P^{110}v = P^{101}v = P^{111}v = 0$.

(3) Con $\Gamma^h(C)$ e $\Gamma^h(\bar{C})$ si intendono gli spazi dei vettori reali a tre componenti di classe h in C e $\bar{C}$ rispettivamente (si considera anche il caso h infinito).

Dimostrazione. – Sia $k^{\beta_1\beta_2\beta_3}(x_1, x_2, x_3)$ una funzione differenziabile in A, appartenente a $K^{\beta_1\beta_2\beta_3}(C)$. Derivando i due membri di (1.3) rispetto a x_i, si ottiene:

$$\frac{\partial k^{\beta_1\beta_2\beta_3}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \in K^{\beta_1+(-1)^{\beta_1}\delta_1^i,\ \beta_2+(-1)^{\beta_2}\delta_2^i,\ \beta_3+(-1)^{\beta_3}\delta_3^i}(C).$$

Ne segue che, qualunque sia i, $\dfrac{\partial v_i^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}{\partial x_i} \in K^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(C)$. Ragionando analogamente sulle derivate di $\operatorname{div} v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, si trova che $\dfrac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \in$ $\in K^{\alpha_1+(-1)^{\alpha_1}\delta_1^j,\ \alpha_2+(-1)^{\alpha_2}\delta_2^j,\ \alpha_3+(-1)^{\alpha_3}\delta_3^j}(C)$. D'altra parte è facile constatare che, per ogni funzione $k^{\beta_1\beta_2\beta_3}$ di $K^{\beta_1\beta_2\beta_3}(C) \cap \Gamma^2(C)$, riesce $\Delta_2 k^{\beta_1\beta_2\beta_3} \in K^{\beta_1\beta_2\beta_3}(C)$.

Ne segue che $L_j v^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \in K^{\alpha_1+(-1)^{\alpha_1}\delta_1^j,\ \alpha_2+(-1)^{\alpha_2}\delta_2^j,\ \alpha_3+(-1)^{\alpha_3}\delta_3^j}(C)$ e che quindi $LP^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v \in V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$. D'altra parte si ha $Lv = L\left(\sum_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{0,1} P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v\right) = \sum_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{0,1} LP^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v$. La tesi è allora la conseguenza di (1.6).

2. – Si considerino, nello spazio vettoriale V (C), le trasformazioni lineari $S^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$, così definite: se $v \equiv (v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3))$

$$S^{(1)} v \equiv (v_1(x_1, x_3, x_2), v_3(x_1, x_3, x_2), v_2(x_1, x_3, x_2)), \tag{2.1}$$

$$S^{(2)}(v) \equiv (v_3(x_3, x_2, x_1), v_2(x_3, x_2, x_1), v_1(x_3, x_2, x_1)), \tag{2.2}$$

$$S^{(3)} v \equiv (v_2(x_2, x_1, x_3), v_1(x_2, x_1, x_3), v_3(x_2, x_1, x_3)). \tag{2.3}$$

È immediato constatare che:

2.I. *Le trasformazioni* $S^{(i)} S^{(i)}$ *sono l'identità.*

Fissato arbitrariamente i, si consideri la permutazione $s_1^{(i)} s_2^{(i)} s_3^{(i)}$ degli indici 1 2 3 che lascia fisso i e sia distinta da 1 2 3. Si ponga per ogni $h(x_1, x_2, x_3)$ definita in C,

$$h^{(i)}(x_1, x_2, x_3) = h(x_{s_1^{(i)}}, x_{s_2^{(i)}}, x_{s_3^{(i)}}). \tag{2.4}$$

2.II. *Se* h *è una funzione differenziabile in* C, *riesce*:

$$S^{(i)} \operatorname{grad} h = \operatorname{grad} h^{(i)}, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2.5}$$

Dimostrazione. – Applicando ad $h^{(i)}$ il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene:

$$\frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_r} = \sum_{j=1}^{3} \left[\frac{\partial h}{\partial x_j}\right]^{(i)} \delta_r^{s_j} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_{s_r^{(i)}}}\right]^{(i)} \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{2.6}$$

Ne segue l'asserto.

2.III. *Se* v *è un vettore di* $\Gamma^2(C)$, *riesce*:

$$\Delta_2 S^{(i)} v = S^{(i)} \Delta_2 v, \tag{2.7}$$

$$S^{(i)} \operatorname{grad} \operatorname{div} v = \operatorname{grad} \operatorname{div} S^{(i)} v. \tag{2.8}$$

Dimostrazione. – Applicando due volte il teorema di derivazione delle funzioni composte alle singole componenti di v si ha: $\Delta_2 v_j^{(i)} = [\Delta_2 v_j]^{(i)}$ e quindi (2.7). Per la (2.8) si osservi che, dalle (2.6), applicate alle componenti v_l di v, segue:

$$\operatorname{div} S^{(i)} v = [\operatorname{div} v]^{(i)}. \tag{2.9}$$

La (2.8) è allora conseguenza di (2.5).

2.IV. *Se* $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ *è una disposizione arbitraria degli indici* $0, 1$ *si ha*:

$$S^{(1)} P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = P^{\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2} S^{(1)} \quad , \quad S^{(2)} P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} S^{(2)}, \qquad S^{(3)} P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = P^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_3} S^{(3)}. \tag{2.10}$$

In particolare le trasformazioni P^{000} *e* P^{111} *sono permutabili con ciascuna delle* $S^{(i)}$. *Negli altri casi esiste una e una sola* $S^{(i)}$ *permutabile con* $P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$.

Dimostrazione. – Dalla (1.4), applicata alle singole componenti di $P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} v$, seguono:

$$[S_1^{(1)} v]^{\alpha_1+(-1)^{\alpha_1}, \alpha_3, \alpha_2} = [v_1^{\alpha_1+(-1)^{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3}]^{(1)}, \quad [S_2^{(1)} v]^{\alpha_1, \alpha_3+(-1)^{\alpha_3}, \alpha_2} = [v^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3+(-1)^{\alpha_3}}]^{(1)},$$
$$[S_3^{(1)} v]^{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2+(-1)^{\alpha_2}} = [v^{\alpha_1, \alpha_2+(-1)^{\alpha_2}, \alpha_3}]^{(1)}. \tag{2.11}$$

Le (2.11) equivalgono alla prima di (2.10). Analogamente negli altri casi.

Osserviamo infine che:

2.V. *Se* $v \in V(\bar{C})$ *ed è nullo su* $\mathfrak{F}C$, *allora* $S^{(i)} v$ *è nullo sulla frontiera di* C *qualunque sia* i.

3. – Si considerino le varietà lineari $V^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ $(\alpha_j = 0, 1; j = 1, 2, 3)$. In base a 2.IV, esiste almeno una trasformazione $S^{(i)}$ che muta in sé $V^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$. Tale trasformazione è univocamente determinata, se gli indici $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ non sono tutti uguali. Nel caso delle varietà V^{000} e V^{111}, scegliamo fra le trasformazioni $S^{(i)}$ (che mutano tutte detta varietà in sé), la trasformazione $S^{(1)}$. In tal modo ad ogni varietà $V^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ resta associata una ben determinata $S^{(i)}$ che la muta in sé. Poniamo:

$$P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 0} = \frac{1}{2} (I + S^{(i)}) P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \quad , \quad P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 1} = \frac{1}{2} (I - S^{(i)}) P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}. \tag{3.1}$$

3.I. *La trasformazione lineare* $P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ $(\alpha_j = 0, 1; j = 1, \cdots, 4)$ *è idempotente. Il codominio* $V^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ *di* $P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ *è costituito da tutti e soli i vettori di* $V^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ *per i quali riesce*

$$v = (-1)^{\alpha_4} S^{(i)} v, \tag{3.2}$$

ove $S^{(i)}$ *è la trasformazione che definisce* $P^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ *tramite le* (3.1).

Dimostrazione. – La prima affermazione è conseguenza di 1.III, 2.I, 2.IV.

Per la seconda parte, si osservi che:

$$2\,S^{(i)}\,P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = (S^{(i)} + (-1)^{\alpha_4}\,I)\,P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 2\,(-1)^{\alpha_4}\,P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$$

e quindi ogni vettore di $V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ verifica la (3.2). Infine, se $v \in V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ e verifica (3.2), allora $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\,v = v$. Il teorema è così dimostrato.

3.II. *Si considerino le sedici trasformazioni lineari* $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$. *Tutti i possibili prodotti di due trasformazioni distinte, danno la trasformazione nulla.*

Dimostrazione. – Segue da 1.III e dall'osservazione che, per $i = 1, 2, 3$, riesce: $(I + S^{(i)})\,(I - S^{(i)}) = (I - S^{(i)})\,(I + S^{(i)}) = 0$.

3.III. *Se* α, β *sono indici distinti, allora*

$$\begin{aligned} &(3.3) \qquad S^{(2)}\,P^{\alpha\beta\beta\gamma} = P^{\beta\beta\alpha\gamma}\,S^{(2)} \quad , \quad S^{(3)}\,P^{\alpha\beta\beta\gamma} = P^{\beta\alpha\beta\gamma}\,S^{(3)}, \\ &(3.4) \qquad S^{(2)}\,P^{\beta\beta\alpha\gamma} = P^{\alpha\beta\beta\gamma}\,S^{(2)} \quad , \quad S^{(3)}\,P^{\beta\alpha\beta\gamma} = P^{\alpha\beta\beta\gamma}\,S^{(3)}, \end{aligned} \qquad (\alpha\,,\beta\,,\gamma = 0\,,1).$$

Dimostrazione. – Osservando che $S^{(2)}\,S^{(1)} = S^{(3)}\,S^{(2)}$; $S^{(3)}\,S^{(1)} = S^{(2)}\,S^{(3)}$, e tenendo presente 2.IV si ha:

$$\begin{aligned} 2\,S^{(2)}\,P^{\alpha\beta\beta\gamma} &= S^{(2)}\,P^{\alpha\beta\beta} + (-1)^{\gamma}\,S^{(2)}\,S^{(1)}\,P^{\alpha\beta\beta} = P^{\beta\beta\alpha}\,S^{(2)} + (-1)^{\gamma}\,S^{(3)}\,S^{(2)}\,P^{\alpha\beta\beta} = \\ &= P^{\beta\beta\alpha}\,S^{(2)} + (-1)^{\gamma}\,S^{(3)}\,P^{\beta\beta\alpha}\,S^{(2)} = 2\,P^{\beta\beta\alpha\gamma}\,S^{(2)}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\,S^{(3)}\,P^{\alpha\beta\beta\gamma} &= S^{(3)}\,P^{\alpha\beta\beta} + (-1)^{\gamma}\,S^{(3)}\,S^{(1)}\,P^{\alpha\beta\beta} = P^{\beta\alpha\beta}\,S^{(3)} + (-1)^{\gamma}\,S^{(2)}\,S^{(3)}\,P^{\alpha\beta\beta} = \\ &= P^{\beta\alpha\beta}\,S^{(3)} + (-1)^{\gamma}\,S^{(2)}\,P^{\beta\alpha\beta}\,S^{(3)} = 2\,P^{\beta\alpha\beta\gamma}\,S^{(3)}\,. \end{aligned}$$

Sono così dimostrate le (3.3). Le (3.4) discendono dalle (3.3) qualora si tenga presente che $S^{(i)}\,S^{(i)}$ è la identità. Si ha infatti, dalla prima delle (3.3): $S^{(2)}\,S^{(2)}\,P^{\alpha\beta\beta\gamma}\,S^{(2)} = S^{(2)}\,P^{\beta\beta\alpha\gamma}\,S^{(2)}\,S^{(2)}$ e quindi la prima delle (3.4); analogamente per le altre.

Osservazione. – Da 3.III discende che le varietà lineari $V^{\alpha\beta\beta\gamma}$, $V^{\beta\beta\alpha\gamma}$ si corrispondono nell'isomorfismo $S^{(2)}$; le varietà lineari $V^{\alpha\beta\beta\gamma}$ e $V^{\beta\alpha\beta\gamma}$ si corrispondono nell'isomorfismo $S^{(3)}$:

$$V^{\alpha\beta\beta\gamma} \xleftrightarrow{S^{(2)}} V^{\beta\beta\alpha\gamma} \quad , \quad V^{\alpha\beta\beta\gamma} \xleftrightarrow{S^{(3)}} V^{\beta\alpha\beta\gamma}.$$

3.IV. *Lo spazio vettoriale* $V(C)$ *si rappresenta come somma diretta dei sedici sottospazi* $V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ $(\alpha_j = 0\,,1\,;j = 1\,,2\,,3\,,4)$.

Dimostrazione. – In base a 1.II, basterà mostrare che:

$$V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 0} \oplus V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 1} \tag{3.4}$$

Per ogni $v \in V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, si ponga

$$v = \frac{1}{2}\,(I + S^{(i)})\,v + \frac{1}{2}\,(I - S^{(i)})\,v \tag{3.5}$$

essendo $S^{(i)}$ la trasformazione lineare che muta in sè $V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, definita all'inizio del numero. Riesce

$$\frac{1}{2}(I + S^{(i)})\, v \in V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 0} \quad ; \quad \frac{1}{2}(I - S^{(i)})\, v \in V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 1}.$$

Per mostrare l'unicità di (3.5), si consideri il vettore nullo e si ponga $0 = n^{(0)} + n^{(1)}$, con $n^{\beta} \in V^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta}$ $(\beta = 0 , 1)$. Riesce allora, in base alla (3.2): $0 = S^{(i)}\, 0 = S^{(i)}\, n^{(0)} + S^{(i)}\, n^{(1)} = n^{(0)} - n^{(1)}$, e quindi $n^{(0)} = n^{(1)} = 0$.

3.V. *Se* $v \in \Gamma^2(C)$, *allora* $LP^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} v = P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} Lv$.

Dimostrazione. – Dalla relazione $2P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} v = P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v + (-1)^{\alpha_4} S^{(i)} P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v$, ove $S^{(i)}$ indica la trasformazione che interviene nella (3.1), segue, in base a 1.V, 2.III, 2.IV: $2\, LP^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} v = P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} Lv + (-1)^{\alpha_4} S^{(i)} P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} Lv =$ $= (I + (-1)^{\alpha_4} S^{(i)})\, P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} Lv = 2\, P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} Lv$.

Si consideri ora la varietà lineare V (C) di W (C) dei vettori a componenti di quadrato sommabile in C e si introduca in essa una struttura di spazio di Hilbert ponendo

$$(3.6) \qquad (u , v) = \int_C u \times v \, dx = \int_C \sum_{i=1}^{3} u_i (x_1 , x_2 , x_3)\, v_i (x_1 , x_2 , x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 .$$

Naturalmente, vettori quasi ovunque uguali in C vengono pensati come un unico elemento dello spazio.

Le trasformazioni lineari $S^{(i)}$, $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ definite in V (C), possono essere pensate come trasformazioni lineari dello spazio di Hilbert W (C) in sé. Ciò è lecito, in quanto vettori di V (C) quasi ovunque uguali in C, vengono trasformati in vettori quasi ovunque uguali [4].

Sussistono i seguenti risultati:

3.VI. *Le trasformazioni lineari* $S^{(i)}$ *di* W (C) *in sé, sono trasformazioni hermitiane.*

Dimostrazione. – Si verifica facilmente che $(S^{(i)} u , S^{(i)} v) = (u , v)$. Ne segue la tesi, in base a 2.I.

3.VII. *Le trasformazioni lineari* $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ *e* $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ *di* W (C) *in sé, sono operazioni di proiezione ortogonale (proiettori).*

Dimostrazione. – In base a 1.III, basterà dimostrare che sono trasformazioni hermitiane. Si verifica facilmente che, se $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ e $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3$ sono disposizioni distinte degli indici 0 , 1, allora $(P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} u , P^{\beta_1\beta_2\beta_3} v) = 0$. Ne segue che

$$(3.7) \quad (P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} u , v) = \sum_{\beta_1,\beta_2,\beta_3}^{0,1} (P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} u , P^{\beta_1\beta_2\beta_3} v) = (P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} u , P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v) = (u , P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} v).$$

(4) Si confronti nota (2).

È così provato che $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ è una trasformazione hermitiana. Si ha inoltre:

$$(P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} u, v) = (P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} u, v) + (-1)^{\alpha_4} (S^{(i)} P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} u, v).$$

Poiché $S^{(i)}$ è permutabile con $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, da (3.7) e 3.VI discende che $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ è hermitiana.

Detti $W^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ e $W^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ i codominii delle trasformazioni $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ e $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ rispettivamente, pensate come trasformazioni di W (C) in sé, dai teoremi 3.II, 3.IV, 3.VII, discende che:

3.VIII. *Lo spazio di Hilbert* W (C) *è somma diretta dei sedici sottospazi* $W^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$, *a due a due mutuamente ortogonali.*

4. – Sia $\mathfrak{A}$ (C) la varietà lineare di W (C) costituita dai vettori dotati in C di tutte le derivate continue e tali inoltre che le derivate prime siano di quadrato sommabile in C. Si consideri in $\mathfrak{A}$ (C) il seguente problema di autovalori:

$$\mathrm{L}w + \lambda w = 0 \quad \text{in C} \quad , \quad w = 0 \quad \text{su } \mathfrak{F}\mathrm{C}. \tag{4.1}$$

Tale problema ammette una successione di autovalori tutti reali positivi, ciascuno dei quali ha molteplicità finita, ed è priva di punti di accumulazione al finito.

Indicherò tale successione nel modo seguente:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots.$$

Ogni autovalore compare in detta successione un numero di volte uguale alla rispettiva molteplicità. Si considerino ora i sedici problemi di autovalori

$$\mathrm{L}w + \lambda w = 0 \quad \text{in C} \quad , \quad w = 0 \quad \text{su } \mathfrak{F}\mathrm{C} \quad , \quad w \in W^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \cap \mathfrak{A}(\mathrm{C}) \tag{4.2}$$

con $\alpha_j = 0, 1; j = 1, 2, 3, 4$.

Ciascuno di tali problemi possiede una successione di autovalori reali positivi con molteplicità finita, priva di punti di accumulazione al finito. Indico con

$$\lambda_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \leq \lambda_2^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \leq \cdots \leq \lambda_k^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \leq \cdots,$$

la successione degli autovalori di (4.2), ciascuno ripetuto un numero di volte uguale alla sua molteplicità.

È bene osservare che gli autovettori dei problemi (4.1) e (4.2) sono continui in ogni punto regolare di $\mathfrak{F}$C [5]. Pertanto essi verificano la condizione al contorno in senso classico. Sussiste il seguente teorema:

4.I. *La successione* $\{\lambda_k\}$ *si ottiene ordinando in una unica successione non decrescente tutti gli elementi delle successioni* $\{\lambda_k^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\}$, $(\alpha_j = 0, 1; j = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, \cdots)$. *Si ha inoltre*:

$$\lambda_k^{100\gamma} = \lambda_k^{010\gamma} = \lambda_k^{001\gamma} \quad ; \quad \lambda_k^{011\gamma} = \lambda_k^{101\gamma} = \lambda_k^{110\gamma} \quad (\gamma = 0, 1; k = 1, 2, \cdots). \tag{4.3}$$

(5) Si confronti ad esempio [3] Lecture 10.

Dimostrazione. – La circostanza che $\{\lambda_k\}$ si ottenga riunendo le successioni $\{\lambda_k^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\}$, è conseguenza immediata di 3.V e 3.VIII. Per la (4.3) si osservi che, come conseguenza di 2.III, se λ_0 è autovalore e w^0 un autovettore corrispondente, allora $S^{(1)} w^0$, $S^{(2)} w^0$, $S^{(3)} w^0$ sono anch'essi autovettori relativi a λ_0. Supponiamo che w^0 appartenga a $W^{\alpha\beta\beta\gamma}$ (con $\alpha \neq \beta$): allora, in base a 3.III, si ha:

$$S^{(2)} w^0 \in W^{\beta\beta\alpha\gamma} \quad , \quad S^{(3)} w^0 \in W^{\beta\alpha\beta\gamma} \text{ (mentre } S^{(1)} w^0 = (-1)^\gamma w^0 \in W^{\alpha\beta\beta\gamma}).$$

Inoltre è facile verificare che le trasformazioni $S^{(i)}$ mutano in sé la varietà lineare $\mathfrak{A}(C)$ e mutano inoltre vettori nulli su $\mathcal{F}C$ in vettori nulli su $\mathcal{F}C$.

Ciò prova che ogni autovalore dal problema (4.2) in $\mathfrak{A}(C) \cap W^{\alpha\beta\beta\gamma}$ è anche autovalore in $\mathfrak{A}(C) \cap W^{\beta\beta\alpha\gamma}$ e in $\mathfrak{A}(C) \cap W^{\beta\alpha\beta\gamma}$. Il viceversa segue dalle (3.4).

Come conseguenza del teorema precedente, il calcolo degli autovalori del problema (4.1) è ricondotto al calcolo degli autovalori dei problemi (4.2) limitatamente agli otto sottospazi $W^{000\gamma}$, $W^{111\gamma}$, $W^{100\gamma}$, $W^{011\gamma}$ $(\gamma = 0, 1)$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. BASSOTTI, *Su un problema di autovalori per l'elasticità piana*, « Riv. Mat. Univ. », *8*, Parma 1967.

[2] G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, « Annali Scuola Norm. Sup. », (3), *4*, Pisa 1950.

[3] G. FICHERA, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*. « Lecture Notes in Math. », *8*, Springer, Berlin 1965.

[4] G. FICHERA, *Lezioni sulla teoria spettrale degli operatori*, « Ist. Mat. », Roma 1968.

[5] S. H. GOULD, *Variational methods for eigenvalue problems*, « Univ. of Toronto Press. », Toronto 1966.