Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Federico Bartolozzi

Alcune considerazioni relative agli omomorfismi tra piani proiettivi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.6, p. 478–484.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_6_478_0>

Matematica. — *Alcune considerazioni relative agli omomorfismi tra piani proiettivi.* Nota di FEDERICO BARTOLOZZI (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A number of cases are given when a homomorphism between two projective planes is necessarily an isomorphism.

W. Klingenberg [6] (1) ha ottenuto numerose proprietà degli omomorfismi fra un piano parziale ed un piano lineare sopra un corpo; successivamente, D. R. Hughes [5] ha studiato gli omomorfismi tra piani di traslazione, mentre altri Autori (V. Corbas [2], [3]; P. Dembowski [4]) hanno ottenuto risultati relativi agli omomorfismi tra piani proiettivi, ponendo in evidenza, tra l'altro, che un omomorfismo tra piani proiettivi finiti deve essere un isomorfismo.

In questa Nota riprendo lo studio degli omomorfismi tra piani, e stabilisco condizioni che assicurano l'impossibilità di definire omomorfismi propri tra piani proiettivi di tipo particolare, ma non necessariamente finiti. Inizio richiamando (al n. 1) alcune nozioni utili allo scopo di evitare equivoci sul significato delle condizioni da me ottenute; pervengo poi ai risultati accennati basandomi su due lemmi di carattere algebrico (n. 2) che dimostro usufruendo di metodi classici di algebra commutativa (esposti, ad esempio, in [8]).

1. Un *piano proiettivo* $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{R}, \in)$ è notoriamente definito da due insiemi disgiunti $\mathbf{P}$ (insieme dei punti del piano Π) ed $\mathbf{R}$ (insieme delle rette del piano Π) e da una relazione (d'incidenza) $\in$ in $\mathbf{P}\times\mathbf{R}$ che verifica le seguenti condizioni:

I) se A e B sono punti distinti del piano Π, esiste una e una sola retta r di Π tale che $A, B \in r$: la r, retta congiungente A e B, si indica anche con $A \cup B$ oppure con AB;

II) se r e s sono rette distinte del piano Π, esiste uno e un solo punto P di Π tale che $P \in r, s$: tale P, punto d'intersezione di r e s, si indica anche con $r \cap s$;

III) nel piano Π esistono quattro punti a tre a tre non appartenenti ad una medesima retta.

Se $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{R}, \in)$ e $\Pi' = (\mathbf{P}', \mathbf{R}', \in')$ sono piani proiettivi, un *omomorfismo* $f : \Pi \to \Pi'$ *del piano* Π *sul piano* Π' è definito da funzioni surgettive

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 17 del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1968.

(1) I numeri in [ ] rinviano alla bibliografia in fine.

$f_1 : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$, $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}'$ verificanti la seguente condizione:

(1) *se* $A \in r$, *con* A *punto di* Π *e* r *retta di* Π, *risulta* $Af_1 \in' rf_2$.

L'omomorfismo $f : \Pi \rightarrow \Pi'$ si dice un *isomorfismo* se le funzioni f_1, f_2 sono iniettive; un isomorfismo $f : \Pi \rightarrow \Pi'$ si dice una *collineazione* se i piani Π e Π' coincidono.

Per non appesantire il simbolismo, indicheremo semplicemente con f tanto f_1 quanto f_2; tale convenzione non può provocare equivoci, poiché apparirà sempre chiaro dal contesto l'insieme cui si applica la f.

Un *riferimento* R *del piano proiettivo* Π è una quaterna ordinata O, E, U, V di punti del piano Π costituita da punti a tre a tre non appartenenti ad una medesima retta di Π; per indicare un riferimento del piano proiettivo Π scriveremo $R = R(O, E, U, V)$.

Sia $f : \Pi \rightarrow \Pi'$ un omomorfismo del piano proiettivo Π sul piano proiettivo Π'; il riferimento $R = R(O, E, U, V)$ del piano Π si dice *associato nell'omomorfismo* f al riferimento $R' = R'(O', E', U', V')$ del piano Π' se risulta $O' = Of$, $E' = Ef$, $U' = Uf$, $V' = Vf$. Si constata facilmente che se $f : \Pi \rightarrow \Pi'$ è un qualunque omomorfismo del piano proiettivo Π sul piano proiettivo Π' e se R' è un qualunque riferimento del piano Π' esiste (almeno) un riferimento R del piano Π che è associato, nell'omomorfismo f, al riferimento R'.

2. Supposto che i piani proiettivi Π e Π' siano piani lineari sopra i campi F e F' rispettivamente, e per significare ciò scriveremo $\Pi = \Pi(F)$ e $\Pi' = \Pi'(F')$, sia $f : \Pi(F) \rightarrow \Pi'(F')$ un omomorfismo tra quei piani, $R' = R'(O', E', U', V')$ un riferimento del piano $\Pi'(F')$ e $R = R(O, E, U, V)$ un riferimento del piano $\Pi(F)$ associato, nell'omomorfismo f, al riferimento R' del piano $\Pi'(F')$.

Con tali dati, introduciamo il piano affine che si ottiene da $\Pi(F)$ assumendo la retta UV come retta impropria e, in questo piano, il suo riferimento affine che ha origine O, punto unità E, asse $x = OU - \{U\}$, asse $y = OV - \{V\}$; introduciamo, inoltre, i punti E_x, E_y, W di $\Pi(F)$ definiti rispettivamente ponendo $E_x = EV \cap x$, $E_y = EU \cap y$, $W = OE \cap UV$. Siano, infine, $E'_{x'}$, $E'_{y'}$, W' i punti e x', y' i sottoinsiemi del piano $\Pi'(F')$ definiti con procedimenti che si ottengono dai precedenti sostituendo, in essi, ogni lettera rappresentativa di un elemento di $\Pi(F)$ con la medesima lettera dotata di apice.

Con tali notazioni e se $A \in y$, risulta $A = (O, a)$ ($a \in F$ opportuno) nel riferimento affine definito in precedenza; inoltre, se $Af \neq V'$, si ha $Af = (O, a')$ con $a' \in F'$ individuato da a e da f (2). Dunque, se $F_{\mathfrak{F}} = \{a \in F \mid (O, a)f \neq V'\}$,

(2) Apparirà sempre chiaro dal contesto il significato del simbolo O. Esso starà ad indicare lo zero del campo F, oppure lo zero del campo F', o anche il punto O del piano $\Pi(F)$. Analogamente, 1 indicherà indifferentemente l'identità del campo F oppure quella del campo F'.

resta definita una funzione $\mathscr{S} : F_{\mathscr{S}} \to F'$ con la posizione $a\mathscr{S} = a'$ se $a \in F_{\mathscr{S}}$ e dove a' è individuato dalla condizione $(O, a)f = (O, a')$. In proposito, sussiste il

LEMMA 1: *Nelle ipotesi precedenti, la funzione* $\mathscr{S} : F_{\mathscr{S}} \to F'$ *è un posto del campo* F. *Il posto* $\mathscr{S}$ *ha anello di valutazione* $F_{\mathscr{S}}$ *e ha campo residuo* F'.

Dimostrazione. Proveremo, ordinatamente, che

(I) $F_{\mathscr{S}}$ è un sottoanello del campo F;

(II) $\mathscr{S} : F_{\mathscr{S}} \to F'$ è un omomorfismo dell'anello $F_{\mathscr{S}}$ sopra il campo F';

(III) se $a \in F$ e $a \notin F_{\mathscr{S}}$ risulta $a^{-1} \in F_{\mathscr{S}}$ e $(a^{-1})\mathscr{S} = O$.

Essendo $Of = O'$, per provare la (I) occorre e basta stabilire che se $a, b \in F_{\mathscr{S}}$ risulta $a+b, ab, -a \in F_{\mathscr{S}}$. All'uopo, posto $A = (O, a)$, $B = (O, b)$, $C = (O, a+b)$, $D = (O, ab)$, $-A = (O, -a)$, è sufficiente mostrare che, se $Af, Bf \neq V'$, risulta $Cf, Df, (-A)f \neq V'$. La tesi si consegue facilmente sfruttando la costruzione grafica che permette di individuare $C, D, -A$ (a partire da A e da B) e tenendo presente la condizione (1) del n. 1; ci limiteremo, quindi, a provare ad esempio che risulta $(-A)f \neq V'$. Consideriamo, innanzitutto, il punto $W^* = E_x E_y \cap UV$ del piano $\Pi(F)$. Poiché $W^*f = E'_{x'} E'_{y'} \cap U'V' \neq U'V'$, è individuata la retta AfW^*f del piano $\Pi'(F')$ ed essa non coincide con la retta $U'V'$; quindi, $AfW^*f \cap O'U'$ è un punto diverso da W' ed è definita la retta $(AfW^*f \cap O'U') \cup W'$, la quale non coincide con la retta $O'V'$. Ne deriva, poiché $-A = [(AW \cap OU) \cup W] \cap OV$, che risulta $(-A)f = [(AfW^*f \cap O'U') \cup W'] \cap O'V'$ e, stante l'ipotesi $Af \neq V'$, si può concludere che di fatto $(-A)f \neq V'$.

Proviamo, ora, la (II). Se $X' \in O'V' - \{V'\}$, sia X un punto di $\Pi(F)$ tale che $Xf = X'$. Poiché $X \notin UV$, risulta $X = (a, b)$ nel riferimento fissato nel piano affine $\Pi(F) - UV$; posto $X^* = XU \cap OV$, è $X^* \in OV - \{V\}$ e deve essere $X^*f = XfU' \cap O'V' = X'U' \cap O'V' = X'$. Ciò comporta che, se z' è un qualunque elemento del campo F', esiste $z \in F_{\mathscr{S}}$ tale che $z\mathscr{S} = z'$, ossia che $\mathscr{S}$ è una funzione surgettiva. La prova che $\mathscr{S} : F_{\mathscr{S}} \to F'$ è un omomorfismo si consegue poi facilmente usufruendo di argomentazioni grafiche e della condizione (1) del n. 1.

Per concludere la dimostrazione del lemma, dobbiamo ancora provare la (III). All'uopo, si supponga $a \in F$ e $a \notin F_{\mathscr{S}}$: deve essere $a \neq O$ e, inoltre, se $A = (O, a)$ deve risultare $Af = V'$. Considerato il punto $A^* = (O, a^{-1})$ del piano $\Pi(F)$, si trova $A^* = \{[(E_y(AE_x \cap UV)) \cap OU] \cup W^*\} \cap OV$, ove W^* ha il significato ad esso attribuito nel dimostrare la (I). Si verifica facilmente che $E'_{y'} \neq V'E'_{x'} \cap U'V'$, $E'_{y'} \cup V' \neq O'U'$, $(E'_{y'} \cup V') \cap O'U' \neq W^*f$ e, quindi, che $\{[(E_y(AE_x \cap UV)) \cap OU] \cup W^*\}f = (E'_{y'}V' \cap O'U') \cup W^*f$. Osservato, inoltre, che $(E'_{y'}V' \cap O'U') \cup W^*f \neq O'V'$, si conclude, in virtù della (1) del n. 1, con l'uguaglianza $A^*f = [(E'_{y'}V' \cap O'U') \cup W^*f] \cap O'V'$, onde $A^*f = O'$ poiché $E'_{y'}V' = O'V'$. Ne deriva, essendo $A^* = (O, a^{-1})$, $a^{-1} \in F_{\mathscr{S}}$ e $(a^{-1})\mathscr{S} = O$.

Il lemma 1 è, così, compiutamente dimostrato.

Da tale lemma discende che l'anello $F_{\mathscr{S}}$ è un anello locale (non necessariamente noetheriano) e che esiste un isomorfismo dal campo quoziente di $F_{\mathscr{S}}$

rispetto al suo ideale massimo (che è il nucleo dell'omomorfismo $\mathcal{S}$) sul campo F′.

Supponendo, ora, che il campo F′ sia finito e quindi isomorfo ad un campo di Galois, vogliamo stabilire alcune condizioni che devono essere soddisfatte dal campo F nell'ipotesi che esista un omomorfismo $f : \Pi\,(F) \to \Pi'(F')$. Tali condizioni sono conseguenze immediate del lemma 1 e dei primi risultati relativi agli anelli di valutazione; per completezza, forniremo le dimostrazioni, anche per i legami che quanto diremo avrà con i teoremi del n. 3.

Sintetizziamo quanto testé accennato nel seguente

LEMMA 2: *Sia* $f : \Pi\,(F) \to \Pi'(F')$ *un omomorfismo e il campo* F′ *sia un campo di Galois* GF (p'^n) *di caratteristica* p' *e di ordine* p'^n. *Se il campo* F *ha caratteristica* p *positiva, allora*:

1) *risulta* $p = p'$;

2) *se* F *è un campo assolutamente algebrico* (*ossia, se* F *è algebrico sopra il suo campo fondamentale*) *i campi* F *e* F′ *sono isomorfi*;

3) *la chiusura algebrica nel campo* F *del suo campo fondamentale è un campo di Galois che ha ordine non superiore a* p'^n.

Dimostrazione. Sia R′ un riferimento del piano $\Pi'(F')$ e sia R un riferimento del piano $\Pi\,(F)$ associato a R′ nell'omomorfismo f. L'omomorfismo f e i riferimenti R , R′ individuano, in virtù del lemma 1, un posto $\mathcal{S}$ del campo F , $\mathcal{S} : F_{\mathcal{S}} \to GF\,(p'^n)$. Detto F_p il campo fondamentale di F, risulta $F_p \subset F_{\mathcal{S}}$; inoltre, la restrizione di $\mathcal{S}$ a F_p è una funzione iniettiva poiché $1\,\mathcal{S} = 1$ e, quindi, definisce un omomorfismo non nullo di F_p nel campo fondamentale di GF (p'^n); risulta, perciò, $p = p'$ ossia vale la 1).

Se F è un campo assolutamente algebrico ogni suo sottoanello, avendo F per ipotesi caratteristica positiva, è un campo. Ne deriva, in particolare, che $F_{\mathcal{S}}$ è un sottocampo del campo F e, poiché $F_{\mathcal{S}}$ è anello di valutazione del posto $\mathcal{S}$ del campo F, risulta $F_{\mathcal{S}} = F$. Ma, allora, l'omomorfismo $\mathcal{S}$ del campo F sopra il campo GF (p'^n) è un isomorfismo, ossia sussiste la 2).

Per provare la 3) si indichi, ancora, con F_p il campo fondamentale del campo F e sia K il sottocampo di F costituito da tutti e soli gli elementi di F che sono algebrici su F_p. È $K \subset F_{\mathcal{S}}$ e la restrizione di $\mathcal{S}$ a K è una funzione iniettiva poiché $1\,\mathcal{S} = 1$; perciò il campo K è isomorfo ad un sottocampo di GF (p'^n), onde la 3).

3. Usufruendo dei lemmi stabiliti al numero precedente, ci proponiamo di illustrare alcune proprietà geometriche inerenti agli omomorfismi tra piani proiettivi. Stabiliamo, intanto, il

TEOREMA 1: *Sia* $f : \Pi\,(F) \to \Pi'(F')$ *un omomorfismo del piano proiettivo* Π *lineare sopra il campo* F *sul piano proiettivo* Π′ *lineare sopra il campo* F′. *Se i campi* F *e* F′ *hanno uguale caratteristica e se i loro gradi di trascendenza sul campo fondamentale sono finiti ed uguali, i campi* F *e* F′ *sono isomorfi e l'omomorfismo* f *è un isomorfismo. In particolare, quindi, se i campi* F *e* F′

sono assolutamente algebrici e di uguale caratteristica l'esistenza di un omomorfismo $f : \Pi(\mathrm{F}) \rightarrow \Pi'(\mathrm{F}')$ *implica che i campi* F *e* F' *sono isomorfi e l'omomorfismo* f *è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Risulti $\Pi(\mathrm{F}) = (\mathbf{P}, \mathbf{R}, \epsilon)$, $\Pi'(\mathrm{F}') = (\mathbf{P}', \mathbf{R}', \epsilon')$ e sia $f : \Pi(\mathrm{F}) \rightarrow \Pi'(\mathrm{F}')$ un omomorfismo tra quei piani, con F e F' campi che verificano le ipotesi del teorema; inoltre, l'omomorfismo f sia individuato dalle funzioni $f_1 : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$ e $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}'$ sussistendo la condizione (1) del n. 1. Fissato un qualunque riferimento $\mathrm{R}' = \mathrm{R}'(\mathrm{O}', \mathrm{E}', \mathrm{U}', \mathrm{V}')$ del piano $\Pi'(\mathrm{F}')$ si consideri un riferimento $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathrm{O}, \mathrm{E}, \mathrm{U}, \mathrm{V})$ del piano $\Pi(\mathrm{F})$ associato a R' nell'omomorfismo f. L'omomorfismo f e i riferimenti R, R' individuano, per il lemma 1, un posto $\mathcal{S}$ del campo F, $\mathcal{S} : \mathrm{F}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathrm{F}'$; nelle ipotesi poste (cfr. [8]) risulta $\mathrm{F}_{\mathcal{S}} = \mathrm{F}$ e, quindi, $\mathcal{S}$ è un isomorfismo del campo F sul campo F'.

Per terminare la dimostrazione del teorema occorre, ancora, provare che le funzioni $f_1 : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$ e $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}'$ sono iniettive. A tal fine, osserviamo, innanzitutto, che quanto provato in precedenza e la definizione di $\mathcal{S}$ data al n. 1 assicurano che la restrizione di f_1 ai punti di $\Pi(\mathrm{F})$ appartenenti alla sua retta OV è una funzione iniettiva. Inoltre, se Z' è un punto di $\Pi'(\mathrm{F}')$ non appartenente alla retta U'V', siano $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2$ punti di $\Pi(\mathrm{F})$ tali che $\mathrm{Z}_1 f_1 = \mathrm{Z}_2 f_1 = \mathrm{Z}'$. Si ha $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2 \notin \mathrm{UV}$ e $(\mathrm{Z}_1\mathrm{U} \cap \mathrm{OV}) f_1 = (\mathrm{Z}_2\mathrm{U} \cap \mathrm{OV}) f_1 = \mathrm{Z}'\mathrm{U}' \cap \mathrm{O}'\mathrm{V}'$, ossia i punti $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2$, U sono allineati. Inoltre, se $\mathrm{W} = \mathrm{OE} \cap \mathrm{UV}$ risulta $(\mathrm{Z}_1\mathrm{W} \cap \mathrm{OV}) f_1 = (\mathrm{Z}_2\mathrm{W} \cap \mathrm{OV}) f_1 = \mathrm{Z}'\mathrm{W}' \cap \mathrm{O}'\mathrm{V}'$ e, quindi, i punti $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2$, W sono allineati. Ciò comporta che $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_2$ e, quindi, la restrizione di f_1 a $f_1^{-1}\{\Pi'(\mathrm{F}') - \mathrm{U}'\mathrm{V}'\}$ è una funzione iniettiva; da ciò e dalla condizione (1) del n. 1 si deduce facilmente che le funzioni $f_1 : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$ e $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}'$ sono iniettive. L'omomorfismo $f : \Pi(\mathrm{F}) \rightarrow \Pi'(\mathrm{F}')$ è, quindi, un isomorfismo; tale conclusione termina la dimostrazione del teorema 1.

Osservazione. L'ultima affermazione del teorema, nell'ulteriore ipotesi che F e F' siano campi di Galois, consegue dall'impossibilità di definire omomorfismi propri tra piani finiti. Ma noi, inoltre, affermiamo: se i piani Π e Π' sono lineari sopra i campi F e F' rispettivamente, per concludere che ogni omomorfismo tra quei piani è un isomorfismo è sufficiente supporre che F e F' abbiano uguale caratteristica (positiva o nulla) e siano assolutamente algebrici; in particolare, perciò, nel caso di caratteristica positiva l'ipotesi di finitezza per F e F' può essere sostituita dall'ipotesi che F e F' siano assolutamente algebrici. Infatti, nel caso particolare in questione, l'uguaglianza della caratteristica di F e di F' si prova con ragionamento analogo a quello svolto nella prima parte della dimostrazione del lemma 2.

Concluderemo la discussione con un secondo risultato relativo ai piani di traslazione che hanno come immagine omomorfa un piano lineare sopra un campo di Galois. Per completezza, e per fissare il simbolismo, ricordiamo che un piano proiettivo Π si dice di traslazione, rispetto ad una sua retta r, se il gruppo delle omologie speciali del piano Π aventi come asse la retta r è (semplicemente) transitivo sui punti di Π che non appartengono a r. È noto (cfr. [7], Appendice) che se Π è piano di traslazione rispetto alla sua retta r, detto $R = R(O, E, U, V)$ un riferimento di Π per il quale $U, V \in r$, è possibile, mediante l'operazione ternaria di Marshall Hall, definire sui punti di $y = OV - \{V\}$ una struttura di quasicorpo; in conseguenza (cfr. [1]), se Q è il quasicorpo così individuato, Q possiede un sottocorpo K, detto nucleo di Q, e Π possiede un sottopiano $\Pi(K)$ lineare sopra il corpo K e contenente i punti O, E, U, V: $\Pi(K)$ è il nucleo del piano Π ed è indipendente da R nel senso che al variare di R si perviene sempre, con la precedente costruzione, ad un nucleo di Π che è isomorfo al piano $\Pi(K)$. Il gruppo (abeliano) T delle omologie speciali del piano Π che hanno per asse la retta r ha una struttura di spazio vettoriale sopra il corpo K; se tale spazio vettoriale ha dimensione finita $[T:K]$ il piano Π si dice di dimensione finita sopra il suo nucleo. Quando ciò accade, non soltanto il quasicorpo Q è spazio vettoriale sopra il corpo K, ma esso ha dimensione finita sopra il corpo K e risulta $2[Q:K] = [T:K]$.

Siamo, adesso, in grado di provare il

TEOREMA 2: *Siano* Π *un piano proiettivo di traslazione rispetto alla sua retta* r, $\Pi'(F')$ *il piano lineare sopra il campo di Galois* $F' = GF(p^n)$, $f: \Pi \rightarrow \Pi'(F')$ *un omomorfismo del piano* Π *sopra il piano* $\Pi'(F')$. *Se il piano* Π *ha dimensione finita sopra il suo nucleo* $\Pi(K)$ *e se il corpo* K *è un campo assolutamente algebrico e di caratteristica positiva, l'omomorfismo* f *è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Non può accadere che $X, Y \in r$ implichi $Xf = Yf = X'$ per ogni scelta di X e Y; infatti, se così fosse, detti Z' un punto di $\Pi'(F')$ tale che $Z' \notin rf$ e Z un punto di Π per cui $Zf = Z'$, per ogni punto A del piano Π non appartenente alla retta r si avrebbe $Af \in Z'X'$ e ciò contrasta con la definizione di omomorfismo. Siano, quindi, $U, V \in r$ tali che $Uf = U' \neq V' = Vf$ e sia $R' = R'(O', E', U', V')$ un riferimento del piano $\Pi'(F')$. È possibile determinare un riferimento $R = R(O, E, U, V)$ del piano Π associato a R' nell'omomorfismo f, con la condizione che U, V siano i punti fissati in precedenza. R individua, per quanto ricordato nella discussione che precede l'enunciato del teorema, un quasicorpo Q il cui nucleo, K, è, nelle ipotesi attuali, un campo assolutamente algebrico e di caratteristica positiva. Detta f' la restrizione dell'omomorfismo f al sottopiano $\Pi(K)$ del piano Π, f' definisce un omomorfismo del piano $\Pi(K)$ lineare sopra il campo K su un sottopiano $\Pi'(F'')$ del piano $\Pi'(F')$; $\Pi'(F'')$ risultando, perciò, un piano lineare sopra il campo di Galois F'' di ordine p^t, con t intero positivo non superiore ad n. Il lemma 2 assicura che il campo K è isomorfo al campo F''; ne deriva, poiché Π ha dimensione finita sopra il suo nucleo, che Π è un piano proiettivo finito e, in conseguenza, l'omomorfismo f (cfr. [2]) è un isomorfismo.

BIBLIOGRAFIA.

[1] J. ANDRÉ, *Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, «Math. Z.», *60*, 156–186 (1954).
[2] V. CORBAS, *Omomorfismi tra piani proiettivi*, I, «Rend. Mat. e Appl.», *23*, 316–330 (1964).
[3] V. CORBAS, *La non esistenza di omomorfismi propri tra piani affini*, «Rend. Mat. e Appl.», *24*, 373–376 (1965).
[4] P. DEMBOWSKI, *Homomorphismen von λ-Ebenen*, «Arch. Math.», *10*, 46–50 (1959).
[5] D. R. HUGHES, *On homomorphisms of projective planes*, «Proc. Sympos. Appl. Math.», *10*, 45–52 (1960).
[6] W. KLINGENBERG, *Projektive Geometrien mit Homomorphismus*, «Math. Ann.», *132*, 180–200 (1956).
[7] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry* (con appendice di L. Lombardo Radice), Roma, Cremonese (1961).
[8] O. ZARISKI e P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, vol. II, Princeton New Jersey, D. Van Nostrand (1960).